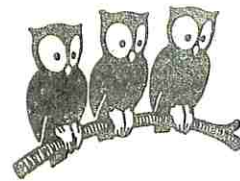


UNIVERSITÉ DE PARIS

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE



THESE présentée
pour l'obtention
du
DIPLOME de DOCTEUR de 3^è CYCLE
à
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Physique des Solides

par Mr Jean Marie MAILLARD

Sujet de la thèse : "Contribution à l'étude des verres de spin : le
concept de frustration".

Soutenue le	1978 devant la Commission composée de :
Monsieur J. BOK	Président
Monsieur M. GAUDIN	Examinateur
Monsieur G. SARMA	"
Monsieur G. TOULOUSE	"
Monsieur J. VANNIMENUS	"

Lecteur, pour vivre bien content,
Lisez pour apprendre à bien vivre,
Et ne perdez point votre temps,
A chercher les fautes d'un livre ;
Il n'en est point de si parfait,
Où vous ne puissiez reprendre ;
Il n'en est point de si mal fait,
En qui vous ne puissiez apprendre.

Jean de la Rivière (1721).

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Groupe de Physique des Solides de l'Ecole Normale Supérieure, dirigé par Monsieur le Professeur J. BOK à qui j'adresse ici mes remerciements pour m'avoir accueilli au laboratoire, rue Lhomond et avoir accepté de présider le jury de ma thèse. La direction de mon travail a été assurée conjointement par Gérard TOULOUSE et Jean VANNIMENUS qui m'ont orienté vers ce sujet de la frustration et des verres de spin.

Je remercie G. TOULOUSE pour la clarté de ses conseils, pour l'accès à la très vaste et très neuve littérature dans ce domaine et surtout pour les contacts qu'il m'a permis d'avoir avec de très nombreuses personnes durant cette année, évitant ainsi tout retrécissement dans l'approche de cette thèse. En particulier, mon séjour à l'Ecole d'Eté de Physique Théorique des Houches 1978 a été très profitable de ce point de vue.

Mais il m'eut été très difficile de persévérer jusqu'à l'aboutissement de cette thèse sans les interactions quotidiennes avec B. DERRIDA et J. VANNIMENUS. Je suis heureux de leur dire la joie et l'intérêt que j'ai trouvés dans cette collaboration. Leur gentillesse et leur amitié ont été pour moi une aide considérable.

Je remercie Messieurs GAUDIN et SARMA pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens à dire combien j'ai apprécié les discussions avec Messieurs R. BIDAUX, J.P. CARTON, L. De SEZE, M. GABAÏ, T. GAREL, S. KIRKPATRICK (que je remercie tout particulièrement pour me permettre d'insérer dans cette thèse quelques figures qu'il a réalisées), V. POENARU, Y. POMEAU et peut-être plus spécialement R. RAMMAL et G. SARMA.

Je tiens également à exprimer ma vive reconnaissance à Mademoiselle VIVION et à Madame NOVO pour leur extrême compétence et leur gentillesse qui ont assuré une frappe rapide et de qualité, Madame MOISSENET la dessinatrice, Monsieur AUQUIER le photographe, qui ont réalisé les figures, Madame AUDOIN qui a satisfait mes exigences pour le tirage avec le sourire et qui a relié la thèse.

TABLE DES MATIERES

	Page
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE I : GENERALITES ET RAPPELS</u>	4
1) Phénoménologie des verres de spin	4
2) Elaboration des modèles (frustration et concepts associés ..	11
3) Modèles recuits, modèles gelés.	14
a) modèles recuits	14
b) modèles gelés	16
4) Méthode des répliques	19
5) Commentaires sur la moyenne sur les configurations : l'I.S.G.	22
6) Séries hautes températures	25
7) Renormalisation	26
8) Simulations numériques	28
9) Conclusion : Questions brûlantes pour le modèles d'Ising : transitions ou pas ?	30
<u>CHAPITRE II : APPROCHES ANALYTIQUES DE MODELES BIDIMENSIONNELS OU UNIDIMENSIONNELS</u>	32
1) La méthode combinatoire dans le modèle d'Ising	32
2) Les modèles de ruban	36
A) Le modèle de Mc Coy et T.T. Wu	36
B) Le modèle de C. Fan et Mc Coy	37
C) Les modèles de ruban	37

	Page
3) Modèles périodiques	40
4) Interface	45
<u>CHAPITRE III : ETUDE NUMERIQUE DES SYSTEMES FRUSTRES DESORDONNES BIDIMENSIONNELS</u>	53
Présentation	54
Propriétés de l'état de base	55
Energie	56
Champs effectifs.....	57
Entropie	59
Energie d'interface, énergie de défaut	60
Corrélations	62
<u>CHAPITRE IV : AUTRES DIRECTIONS D'APPROCHE - DUALITES DANS LES MILIEUX DESORDONNES</u>	66
1) Dualité sur les modèles d'Ising	66
2) Extension à d'autres modèles	69
TRANSITION RUGUEUSE	74
CONCLUSION	76

	Page
APPENDICE N° 1 - Modèles recuits	79
" N° 2 - Méthode des répliques	82
" N° 3 - I.S.G.	84
" N° 4 - Le modèle de Mc Coy et Wu	86
" N° 5 - + Le modèle de Fan et Mc Coy	88
+ Le modèle d'Ising aléatoire en champ constant	89
" N° 6 - Modèle de rubans	92
" N° 7 - Modèles périodiques	
A) Le modèle en bretelle	95
B) Un autre modèle -	99
" N° 8 - Fonctions de corrélations des modèles périodiques	102
" N° 9 - Dualité dans les milieux désordonnés	
A) Générale	105
B) Sur les modèles unidimensionnels.....	107
" N°10 - Une relation originale à propos de la méthode des répliques	109

INTRODUCTION

Si l'étude des systèmes désordonnés a commencé depuis longtemps, la recherche des effets spécifiques est plus récente. Pendant longtemps, en effet, la tendance a été de ramener le milieu inhomogène à un milieu homogène "effectif". Des méthodes très raffinées et très puissantes ont été développées dans ce sens mais bien entendu, elles ne peuvent rendre compte des effets spécifiques, irréductibles, du désordre.

Dans l'ensemble général des effets du désordre, on peut distinguer, au moins provisoirement, les effets de dilution et les effets d'opposition. Ainsi, si on introduit des impuretés dans une matrice, elles peuvent jouer un rôle inerte (par exemple, atomes non magnétiques dans une matrice magnétique) ou bien s'opposer plus activement aux propriétés de la matrice (de ceci, on aura l'occasion de donner de nombreux exemples, car c'est le sujet de cette thèse). Dans l'étude des effets de dilution, il existe un modèle : le modèle de la percolation, qui exhibe très clairement des effets spécifiques du désordre de dilution. La percolation constitue en fait le modèle-type (paradigme) dans la recherche des effets spécifiques du désordre et son étude, poursuivie depuis vingt ans, est très avancée.

Cependant, il y a des raisons expérimentales et théoriques de penser que les effets d'opposition conduisent à une physique plus riche encore que les effets de dilution. Sur le plan expérimental, il s'agit de l'ensemble des mesures concernant les matériaux appelés "verres de spin", pour lesquels il semble qu'une transition de type nouveau prenne place. Bien que la question soit loin d'être réglée, il semble que cette transition soit qualitativement différente à la fois des transitions de phase ordinaires et des transitions "vitreuses" et qu'elle soit à divers égards, de nature un peu intermédiaire entre les deux. Cette perspective suscite naturellement un intérêt considérable, et il était assez naturel de chercher, pour les effets d'opposition, un modèle qui puisse jouer le rôle que joue le modèle de la percolation, pour les effets de dilution.

Quelques mois avant le début de ce travail de thèse, il a été suggéré qu'un certain modèle : le modèle de la frustration, décrit en détail plus loin, était un bon candidat pour exhiber le plus clairement les effets spécifiques du désordre d'opposition. Cette thèse est consacrée à l'étude de ce modèle de la frustration.

Dans ce texte, je me suis efforcé :

- d'une part, de situer le problème, les diverses approches possibles, les principaux résultats déjà obtenus, les questions les plus brûlantes ;
- d'autre part, d'expliquer les résultats des divers travaux auxquels j'ai contribué ou réfléchi au sein du groupe de l'E.N.S. ;
- enfin, de présenter diverses approches qui, sans avoir encore pleinement abouti, paraissent prometteuses.

Plus précisément, cette thèse est divisée en quatre grandes parties. La première est constituée de généralités et de rappels. Une phénoménologie rapide des verres de spin nous permet de réfléchir sur l'élaboration des divers modèles possibles, et ce, dans le cadre du concept de frustration. Nous passons en revue par la suite les diverses approches traditionnelles de ces problèmes. (modèles recuits, modèles gelés : méthode des répliques, séries hautes températures, renormalisation, simulations numériques).

La deuxième partie contient les divers travaux analytiques effectués dans le cadre de ce laboratoire : un modèle unidimensionnel (le modèle des rubans), et l'étude de modèles périodiques frustrés avec une étude plus poussée de leurs propriétés d'interface. Avant ces approches analytiques figurent des rappels sur le modèle d'Ising et le modèle de Mac Coy et Wu permettant de mieux comprendre ce chapitre.

L'étude numérique de systèmes frustrés bidimensionnels est l'objet de la troisième partie, avec une attention particulière portée aux propriétés des états de base, l'énergie d'interface, les corrélations (statistique d'amas).

La quatrième partie s'intéresse à d'autres directions d'approche. Entre autres, elle traite des rapports de la transition verre de spin avec la transition rugueuse et de l'outil puissant que peuvent constituer certaines transformations, en particulier des transformations de dualité qui ont été jusqu'ici peu exploitées dans ces problèmes.

CHAPITRE I

GENERALITES ET RAPPELS

1) PHENOMENOLOGIE DES VERRES DE SPIN

Il n'existe pas à l'heure actuelle de définition unique du verre de spin. Néanmoins, un comportement commun a pu être dégagé dans une large variété de matériaux qui contiennent des atomes magnétiques dilués au hasard avec des atomes non magnétiques. Les premiers alliages définis comme verres de spin (CuMn et AuFe) possèdent des interactions oscillantes à longue portée du type Ruderman - Kittel - Yosida - Yosida (RKKY). D'autres verres de spin (des verres amorphes par exemple GdAl) ont des interactions à courte portée. Du point de vue de l'expérimentateur, la condition pour voir un comportement verre de spin semble être que le système contienne un certain type de désordre structural qui induit des fluctuations pour l'interaction spin-spin importantes comparées à leur valeur même.

Le mieux est sans doute de définir le verre de spin par ses propriétés physiques caractéristiques ^(1,2).

Une discontinuité de la dérivée première (cusp) apparaît dans la susceptibilité au champ nul $\chi(H=0)$ à une certaine température T_{SG} . Ce point anguleux est fortement arrondi par les champs magnétiques relativement faibles (figures 1 et 2).

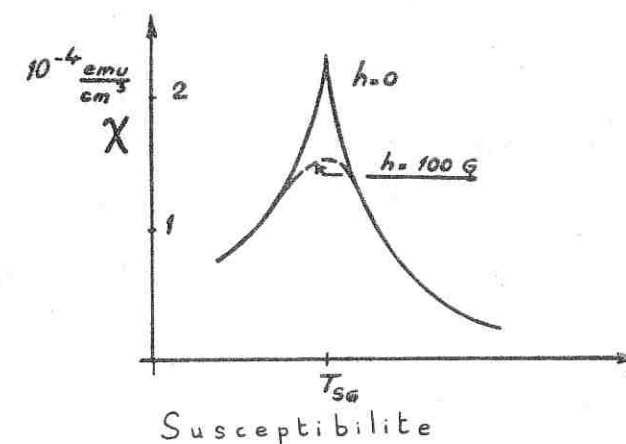


Figure 1 : Susceptibilité avec et sans champ magnétique

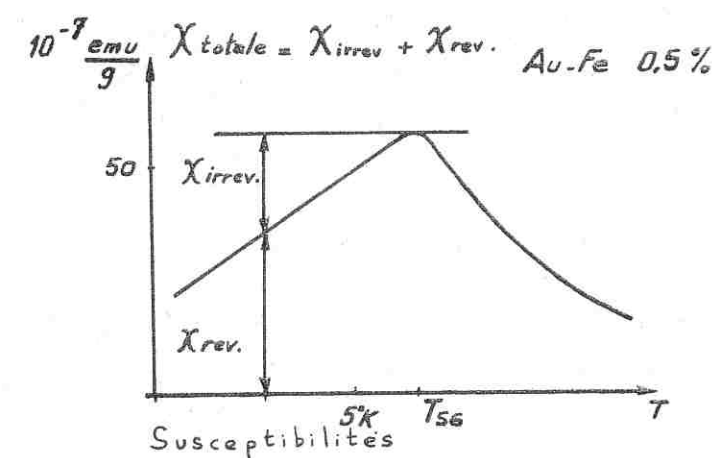


Figure 2 : Susceptibilités réversible et irréversible ; la susceptibilité totale est une constante.

Lorsqu'on impose un champ, on constate que l'aimantation de ce verre à $T < T_{sg}$ évolue pendant des temps beaucoup plus grands que la durée de l'expérience. Lorsqu'on supprime le champ la réponse instantanée disparaît immédiatement, l'aimantation rémanente (figure 3) décroissant logarithmiquement avec le temps. L'hystérésis magnétique

observée en dessous de T_{SG} indique l'existence de temps de relaxation très longs.

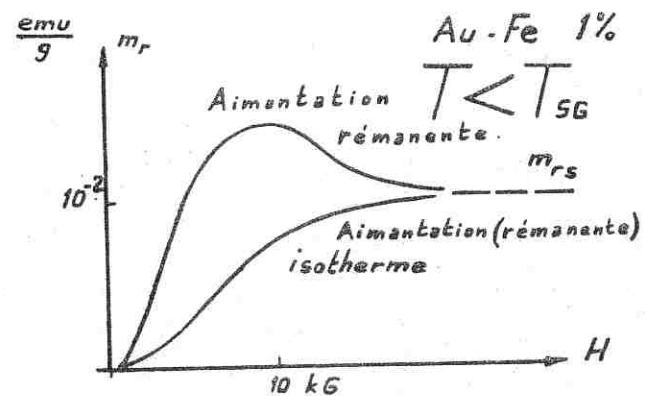


Figure 3 : Aimantation rémanente isotherme à $T < T_{SG}$; Aimantation rémanente en refroidissant sans champ de $T < T_{SG}$ à $T < T_{SG}$.

La diffusion de neutrons ne montre aucun pic de Bragg caractéristique des ordres périodiques à longue portée en dessous de T_{SG} , mais il montre par contre une diffusion aux petits angles importante (Figure 4).

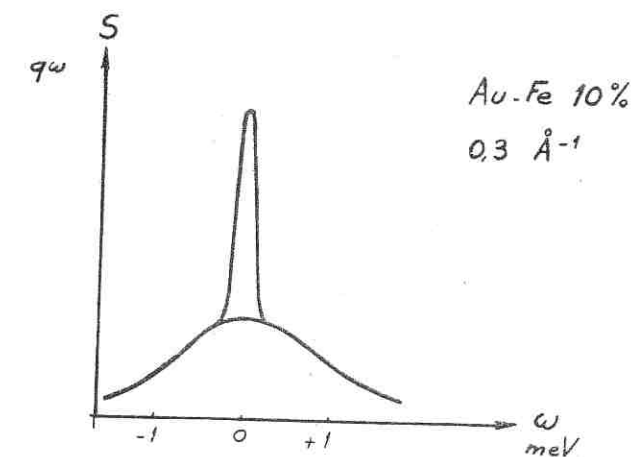


Figure 4 : Diffusion neutrons.

Il n'y a pas de comportement singulier dans la chaleur spécifique à T_{SG} . Cette chaleur spécifique apparaît bien à peu près linéaire à basse température (figure 5).

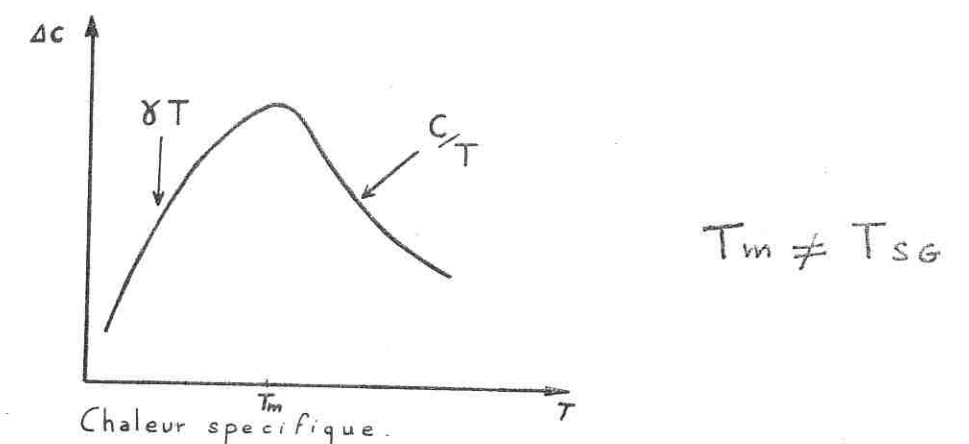


Figure 5 : Chaleur spécifique : elle a un comportement linéaire en T à faible température et suit une loi de Curie aux hautes températures.

Des comportements en $T^{3/2}$ et même T^2 ont été mis en évidence au dessous de la région linéaire de résistivité (figures 6 et 7).

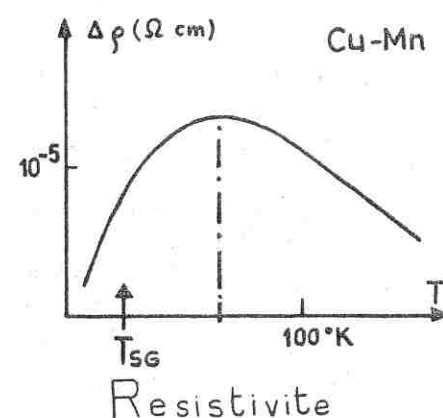


Figure 6 : Résistivité : aucune particularité.

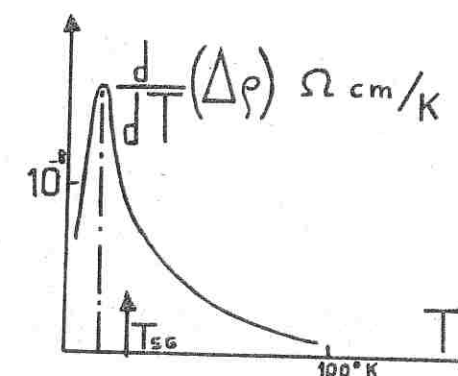


Figure 7 : Dérivée de la résistivité par rapport à la température : elle présente, elle, un maximum affirmé.

L'ensemble des résultats expérimentaux indique que la transition verre de spin n'est pas de même nature que la transition vitreuse ordinaire⁽³⁾. Cependant, il ne peut être considéré comme prouvé qu'il existe une transition franche à T_{sg} . En tout cas, il apparaît que les phénomènes dépendant du temps (métastabilité, hystérésis, ...) risquent souvent de

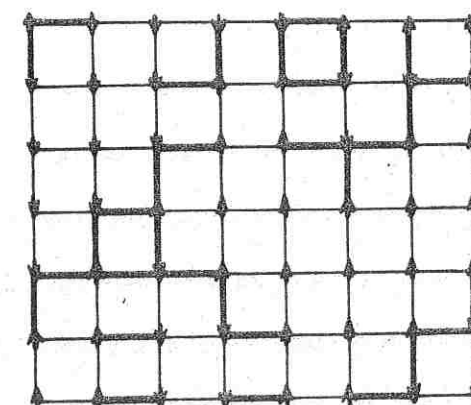
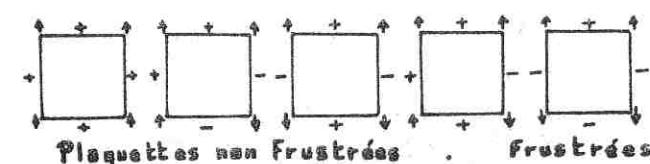
cachez les phénomènes statiques et qu'ils jouent un rôle plus important que dans les transitions ordinaires.

Pour bâtir des modèles théoriques, il s'agit de distinguer les paramètres essentiels des autres. Au lieu d'un modèle d'impuretés avec désordre de position et interactions à longue portée de type RKKY, où $J_{ij} \sim \frac{A \cdot \cos(2k_F r_{ij} + \phi)}{r_{ij}^3}$, les théoriciens en sont rapidement venus à raisonner sur des réseaux réguliers avec interactions restreintes aux plus proches voisins et aléatoires. On trouve deux grands types de loi de distribution pour les J_{ij} : les distributions gaussiennes qui permettent de mener plus facilement les calculs jusqu'à leur terme et les distributions sommes de plusieurs pics delta. Nous faisons ici le deuxième choix et nous plaçons nos pics delta sur deux valeurs opposées $\pm J$. Un tel modèle de frustration pure peut paraître par trop idéalisé. Il présente l'intérêt de souligner l'effet caractéristique qu'est l'aspect compétition entre interactions de signes opposés, autrement dit l'effet de frustration. Comme on le verra, les études par simulation numérique permettent de contrôler dans une large mesure les effets des hypothèses de départ.

REFERENCES

- (1) J. Joffrin, Ecole d'Eté de Physique Théorique des Houches (1978), R. Balian et G. Toulouse eds.
- (2) J. Souletie, J Physique Supp C 2 Poitiers (1978).
- (3) P.W. Anderson : "Lectures on amorphous systems", les Houches (1978).
- (4) K. Binder : "Theory of spin glasses : a brief review", Festkörperprobleme, Vol. XVII, p. 55, J. Treusch (ed) Vieweg, Braunschweig (1977).

Figure 8 : Plaquettes frustrées ou non.



Changement de Mattis :
aucune plaquette n'est frustrée

Figure 10 : Changement de Mattis sur le réseau carré.

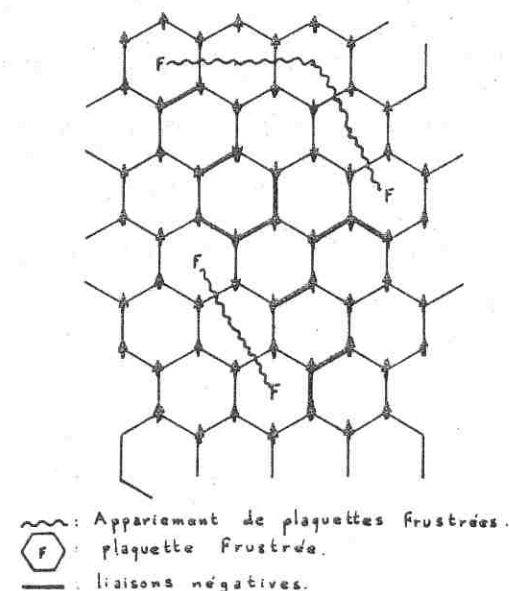


Figure 9 : Appariement de plaquettes frustrées sur un réseau nid d'abeille.

2) ELABORATION DES MODELES (FRUSTRATION ET CONCEPTS ASSOCIES).

Introduisons le concept de frustration sur l'exemple le plus simple : des spins d'Ising sur un réseau carré avec $J_{ij} = \pm J$. Considérons le motif constitué par les quatre spins aux sommets d'un carré élémentaire (figure 8) soit J_{ij} les quatre liaisons placées sur les côtés de ce même carré. Si le produit des J_{ij} est négatif, il est impossible de satisfaire toutes les liaisons (c'est-à-dire mettre les spins parallèles de part et d'autre des liaisons ferromagnétiques et antiparallèles pour les liaisons antiferromagnétiques). On peut satisfaire, si le produit est négatif pour un chemin fermé quelconque) toutes les liaisons, sauf une seule (ou un nombre impair mais c'est encore plus défavorable, énergétiquement parlant). Cette liaison sera dite frustrée. Une plaquette ou un chemin fermé seront dits frustrés s'ils contiennent une telle liaison (5).

On appellera ϕ_c le produit des signes J_{ij} selon un chemin c donné. Lorsque c est le périmètre d'un carré élémentaire, on parlera de la variable de plaquette ϕ (6). Cette notion se généralise immédiatement à d'autres réseaux.

Donnons nous une configuration de désordre, déterminée en fixant les variables ϕ pour toutes les plaquettes du réseau : quelle est l'énergie la plus basse d'un tel état, à température nulle ? Pour répondre à cette question, remarquons tout d'abord qu'il existe un théorème de conservation.

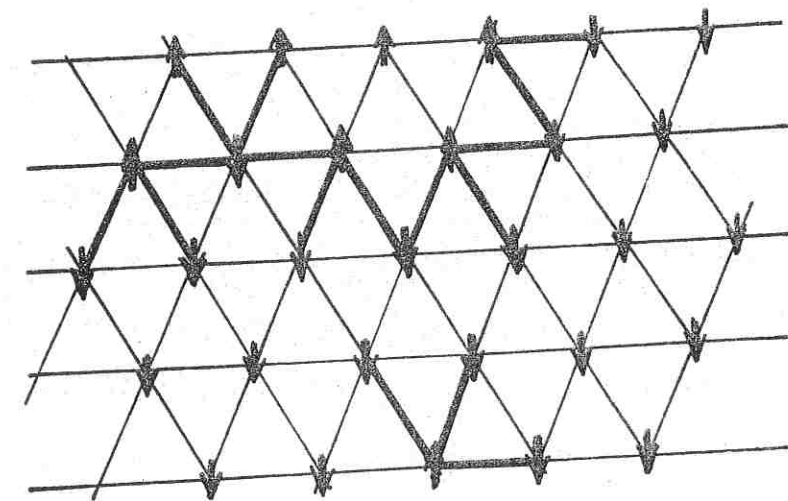


Figure 11 : Changement de Mattis sur le réseau triangulaire.

Supposons qu'une plaquette non frustrée possède une liaison frustrée, il est aisé de se rendre compte qu'il en existe une ou un nombre impair d'autres. Autrement dit, si l'on associe à toute liaison frustrée, sa liaison duale, il doit exister un chemin réalisé à l'aide de ces liaisons duales allant d'une plaquette frustrée à une autre (figure 9). Le nombre de ces liaisons duales (c'est-à-dire la longueur totale des chemins) mesure l'énergie de cet état.

Le problème revient, s'étant donné $2p$ points sur le réseau dual (les $2p$ plaquettes frustrées) à chercher à les relier deux à deux par des cordes, en utilisant au total le moins de corde possible.

Ce modèle, dont l'hamiltonien est $H = - \sum J_{ij} S_i S_j$ possède une propriété importante : si l'on change localement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(A)} S_i \rightarrow - S_i \\ \text{(B)} J_{ij} \rightarrow - J_{ij} \end{array} \right. \text{ (pour tous les } j \text{)}^{(I)},$$

on ne modifie pas l'hamiltonien. Ce que l'on peut encore formuler en disant que la configuration $J_{ij} = J_{ij} \epsilon_i \epsilon_j$ conduit à la même fonction de partition (faire le changement de variable $S'_i = S_i \epsilon_i$). Nous appellerons un tel passage d'une configuration de J_{ij} à une autre un changement de Mattis (fig. 10 et 11) (pour $J_{ij} = J$, on traite le modèle de Mattis pour les J_{ij}). Ces deux configurations correspondent à la même configuration de plaquettes.

La remarque importante qui découle de ces idées, est qu'une partie (statique, en champ nul) de la physique du problème ne dépend que de la configuration des plaquettes frustrées.

La transformation locale (I) ci-dessus n'est pas sans rappeler les transformations de jauge de l'électromagnétisme

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x) \rightarrow e^{i e v(x)} \phi(x) \\ A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu v(x) \end{array} \right.$$

où ϕ fonction d'onde est l'équivalent de S : ce sont tous deux les

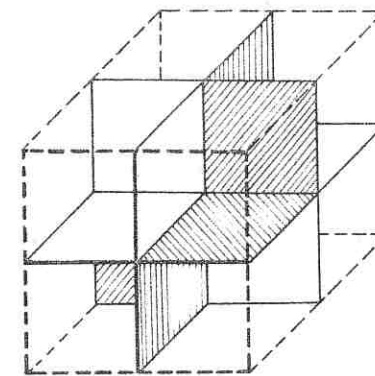


Figure 12 : La loi de conservation sur le réseau cubique : le nombre de faces frustrées par cube est un nombre pair.

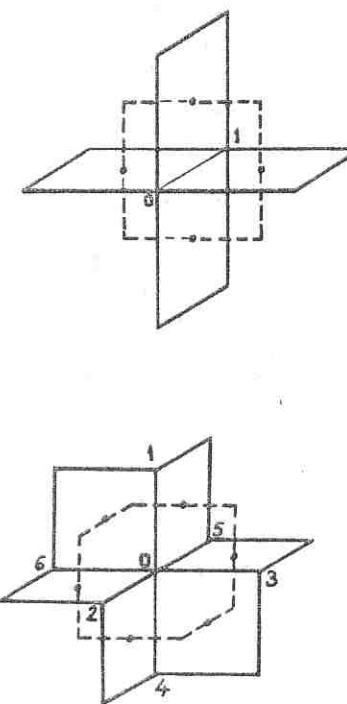


Figure 13 : La loi de conservation : les liaisons duales forment des chemins fermés.

champs de matière du problème; ici $A_\mu(x)$, quadri-vecteur potentiel, (dont dérivent E et B qui sont les observables physiques) n'est pas en soi une grandeur physique : il est défini à un gradient près. De même J_{ij} caractérise la physique du problème modulo un changement de Mattis.

En dimension trois, la loi de conservation donne dans ce cas que le nombre de faces frustrées autour d'un cube doit être pair. On associe à chaque face frustrée sa liaison duale orthogonale. La loi de conservation nous dit que si une telle liaison transperce une face d'un cube, une autre doit ressortir de ce cube (fig. 12). En d'autres termes, ces liaisons duales forment des chemins fermés ⁽⁵⁾ (fig. 13 et 14). L'énergie du fondamental en dimension deux était obtenue en reliant deux plaquettes frustrées avec une longueur de corde minimale. Dans le cas présent, il faut rechercher la surface minimum s'appuyant sur ces chemins fermés que nous venons de décrire. Ceci est une variante du célèbre problème de Plateau.

Signalons aussi le modèle où l'on place sur un réseau (carré, cubique ...) deux types d'atomes : A et B. Il y a alors trois intégrales d'échange (on se restreint à des interactions entre plus proches voisins) J_{AA} , J_{AB} , J_{BB} . Si l'on suppose J_{AA} , $J_{BA} > 0$ et $J_{BB} < 0$ on obtient un modèle que l'on pourrait qualifier de frustration par site (par analogie avec la percolation par site), par opposition au modèle précédent qui est de la frustration par liaison.

REFERENCES

- (5) G. Toulouse, Comm. on Phys. , 115 (1977)
- (6) R. Balian, J.M. Drouffe, C. Itzykson, Phys. Rev. D 10, 3376 (1974).
- (7) S. Kirkpatrick, Phys. Rev. B 16, 4630 (1977).
- (8) A.J. Bray, M. Moore, P. Reed, J. Phys. C 11, 1187 (1978).

3) MODELES RECUIITS, MODELES GELES

Dans tout problème désordonné, une fois décidé du choix de l'hamiltonien du modèle, il reste encore à décider le type de moyenne à effectuer sur le désordre. Il existe deux grandes catégories : les modèles recuits et les modèles gelés.

a) Modèles recuits

L'effet d'un certain type de désordre, dit recuit, est maintenant bien compris et conduit dans certains cas à une renormalisation à la Fisher ^(9,10) des exposants critiques. Le désordre recuit est un désordre thermique ordinaire, pour lequel l'arrangement des défauts (ou bien dans notre cas la distribution des liaisons J_{ij}) change avec la température selon les lois de la mécanique statistique : on impose la concentration, moyenne x , de liaisons antiferromagnétiques par l'intermédiaire d'un potentiel chimique μ en écrivant :

$$\frac{\partial \ln E}{\partial \mu} = x \quad (I)$$

où E est la grande fonction de partition.

D'une façon plus générale, les exposants critiques $\alpha_E, \beta_E, \gamma_E \dots$ d'un système physique lorsqu'on impose une contrainte sur une variable extensive E (en l'occurrence ici $E = x$) sont $\alpha_E = \frac{-\alpha}{1-\alpha}$, $\beta_E = \frac{\beta}{1-\alpha}$, $\gamma_E = \frac{\gamma}{1-\alpha}$ (où α, β, γ sont les exposants sans cette contrainte), si α est positif et demeurent inchangés, si $\alpha < 0$.

Dans cette rubrique, figurent les modèles de Syözi ⁽¹²⁾ (fig. 15) : le spin S traduit la liberté de la liaison d'être présente ou absente,

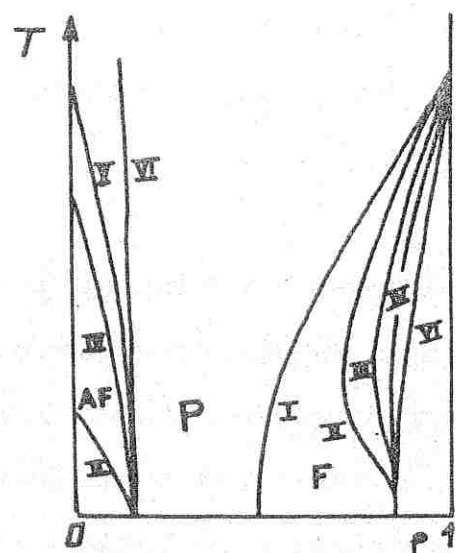


Diagramme de phase de divers modèles d'Ising recuits.

positive ou négative ... La concentration des liaisons, négatives ou positives, présentes ou absentes est fixée par une condition du type (I).

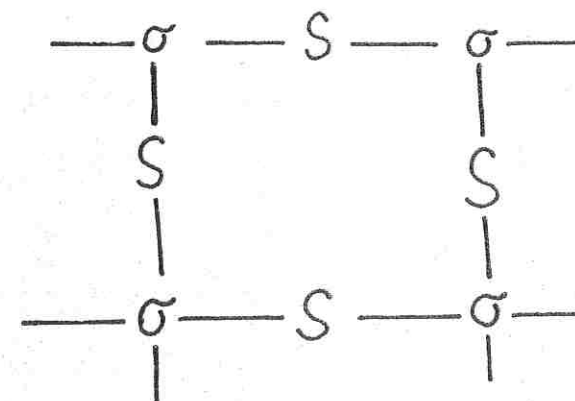


Figure 15

On peut imaginer des motifs plus compliqués :

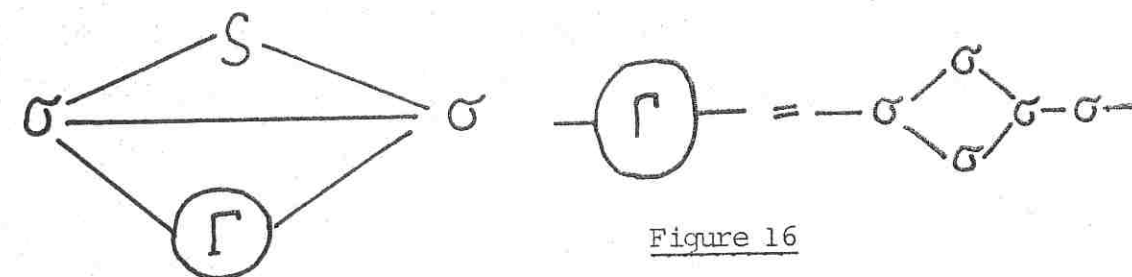


Figure 16

qui peuvent donner lieu à des transitions multiples (11).

Au lieu d'imposer une condition du type (I), introduisons la probabilité p d'avoir une liaison dans l'état de spin $S = -1$ (liaison antiferromagnétique ou liaison absente par exemple) dans l'Hamiltonien même : l'hamiltonien est du type : $H = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j + \mu \sum_i S_i$ (II) avec $p = \frac{e^{\mu}}{e^{\mu} + e^{-\mu}}$. On voit qu'en sommant d'abord sur les spins S , on redéfi-

nit une nouvelle interaction compliquée de la température (fig. 16) mais analytique. Les exposants critiques sont donc les mêmes que dans le problème ordonné : $\alpha' = \alpha$ $\beta' = \beta$ $\gamma' = \gamma$. Nous voyons qu'imposer l'aléatoire de la façon (I) ou de la façon (II) ne conduit pas aux mêmes exposants critiques (exception faite dans le cas d'Ising ($d = 2$) où $\alpha = 0$ dans les deux cas). Mais dans les deux cas, le désordre est thermique (les S_{ij} sont des variables dynamiques au même titre que les i). On peut qualifier les modèles du type (II) de pseudo-recuits. Dans ces modèles, on calcule $\ln \langle Z \rangle$ où $\langle \rangle$ est la moyenne sur les configurations de liaisons.

REFERENCES

- (9) H.E. Fisher, A. Aharony, Phys. Rev. Letters 31, 1238, 1537 (1973).
- (10) H.E. Fisher, R.J. Burford, Phys. Rev. 156, 583 (1987).
- (11) Y. Kasaï and I. Syozi, Prog. Theor. Phys. 50, 1182 (1973).
- (12) Y. Kasaï, S. Miyozima, I. Syozi, Progr. Theor. Phys. 42 19 (1969).

b) Modèles gelés

A ces modèles recuits s'opposent les modèles où la distribution des atomes (resp. liaisons) est tenue fixe, indépendante de la température. Par exemple, si le temps de relaxation correspondant au réarrangement atomique est très long comparé au temps pendant lequel l'expérience est effectuée, ce qui est usuellement le cas, on pourra considérer le système comme gelé.

Il n'est évidemment pas possible de calculer l'énergie libre F en fonction des positions de toutes les impuretés. Mais si ces impuretés sont distribuées indépendamment, différentes parties du système sont pratiquement indépendantes (tant que la longueur de corrélation est petite par rapport à leurs dimensions).

Divisons le système en n^d sous-systèmes (d dimension de l'espace) : dans chacun des sous-systèmes, il y a une certaine configuration de désordre $\{J\}$.

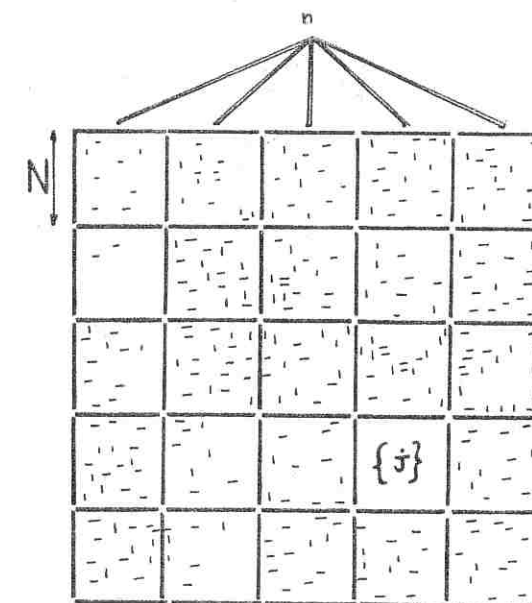


Figure 17

Si l'on fait tendre la taille commune à tous les sous-systèmes vers l'infini, on peut supposer que les interactions sur leurs frontières sont négligeables et écrire $-\beta F = \frac{\ln Z}{n \cdot N^d} = \frac{1}{n^d} \sum_i \frac{1}{N^d} \ln Z \{J\}$ (i)

où i indexe un sous-système) $= \frac{1}{n^d} \sum_{\{J\}} \frac{1}{N^d} (P\{J\} n^d) \ln Z \{J\}$

$$= \sum_{\{J\}} P\{J\} (-\beta F\{J\}).$$

$P\{J\}$ étant la probabilité de rencontrer la configuration $\{J\}$. Ce raisonnement ⁽¹⁴⁾ n'est pas sans rappeler mais dans un tout autre domaine l'argument de Gibbs ramenant la moyenne sur le temps à une moyenne d'ensemble. Il faut donc calculer $F = \langle F \{J\} \rangle$ où $\langle \rangle$ désigne une moyenne sur les configurations.

Cette moyenne à effectuer sur un logarithme constitue la raison majeure pour laquelle ces problèmes gelés représentent un problème difficile.

REFERENCES

(13) R.B. Griffiths in C. Domb and M.S. Green, Vol. 1, § 2 "Rigorous Results and Theorems" IX B: "Random Systems" (1972).

(14) T.C. Lubensky : "Thermal and Geometrical critical phenomenon in random systems" Les Houches (1978).

4) METHODE DES REPLIQUES

Une méthode d'attaque de cette moyenne d'un logarithme a été donnée par Edwards et Anderson ⁽¹⁵⁾, elle utilise une ancienne astuce mathématique dont l'inventeur semble être Marc Kač, où n sera interprété comme un nombre de répliques du système (voir détails de la méthode en appendice). La méthode en elle-même pose des problèmes délicats de permutation de deux limites et de deux sommations, et surtout de continuation analytique en n.

Edwards et Anderson ont choisi de définir comme paramètre d'ordre $Q = \langle S_i^{(\alpha)} S_i^{(\beta)} \rangle$ où i est un indice de site et α un indice de réplique et où $\langle \rangle$ signifie la moyenne thermique. Q non nul malgré une aimantation nulle est interprété comme un gel des spins les uns par rapport aux autres sans orientation préférentielle.

Edwards et Anderson interprètent cette moyenne comme équivalente à effectuer la moyenne sur le temps pour un spin.

Un modèle important parce qu'il donne une idée de ce que peut être une théorie de champ moyen pour les verres de spin est le modèle de Sherrington et Kirkpatrick ⁽¹⁶⁾. Dans ce modèle, tout spin du réseau est couplé avec tout autre spin dans le cas pur et dans ce cas donne le champ moyen. (On peut dire en une phrase que l'on "perd" l'espace : un nombre infini de voisins signifie une dimension de l'espace infinie). Dans cet article, les auteurs utilisent également la méthode des répliques, ils font commuter les deux limites ($n \rightarrow 0$ et limite thermodynamique). Ils se servent de la méthode du col associée

à l'hypothèse que l'extrémum doit intervenir lorsque les répliques jouent des rôles identiques ⁽¹⁷⁾ ; Sherrington et Kirkpatrick prouvent l'existence d'une phase verre de spin. (Même si leur théorie n'est pas exacte à $T \ll T_{sg}$, elle est correcte jusque $T = T_{sg}$). Il est important de noter que "le" champ moyen est remplacé par une distribution $P(H_{eff})$ qu'il faut déterminer.

La plupart de leurs résultats sont raisonnables (vérifiés par simulation numérique) sauf l'entropie à $T = 0$ qui est (faiblement) négative.

Dans un autre article Thouless, Anderson et Palmer ⁽¹⁸⁾ reconsidèrent ce problème avec une théorie de champ moyen qui, elle, ne donne pas d'incohérence du type entropie négative.

Enfin, Kosterlitz, Thouless et Jones ⁽¹⁹⁾ réexaminent ce même modèle mais en regardant des spins continus avec une condition sphérique ($\sum S_i^2 = N$). Cela leur permet d'éviter la méthode des répliques. L'intégration gaussienne sur les spins conduit à un déterminant, qu'un théorème dû à Mehta sur le spectre d'une matrice aléatoire gaussienne permet d'évaluer. Ce calcul explicite donne également une phase verre de spin.

REFERENCES

- (15) S.F. Edwards, P.W. Anderson, J. Phys. F (Metal Phys) 5 965 (1975).
- (16) D. Sherrington, S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Letters 35, 1792 (1975).
- (17) De Almeida J.R.L., D.J. Thouless (1977).
- (18) D.J. Thouless, P.W. Anderson, R.G. Palmer, Philosophical Magazine, 35, 593 (1977).

- (19) J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless, R.C. Jones , Phys. Rev. Letters 36, 1217 (1976).

5) COMMENTAIRES SUR LA MOYENNE SUR LES CONFIGURATIONS : L'I.S.G.

Nous allons discuter certaines relations que l'on peut obtenir rigoureusement dans le cadre d'une théorie de modèle gelé. Nous reprenons pour une théorie idéale de ce type la dénomination de G. Sarma et al d'I.S.G. (ideal spin glass).

Sous des hypothèses très larges (à savoir la probabilité est invariante de jauge : $P(\{J_{ij}\}) = P(\{\epsilon_i \epsilon_j J_{ij}\})$ ce qui ne demande même pas que la probabilité se factorise en un produit de fonctions dépendant chacune d'une variable J_{ij}), on peut démontrer des propriétés fondamentales très nombreuses (appendice I.S.G.). α indexe une réplique, $\langle \rangle$ désigne la moyenne thermodynamique, $\overline{}$ la moyenne sur les J_{ij} , on a les résultats :

$$\overline{\langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle} = \delta_{ij} \cdot \delta_{\alpha\beta} \frac{S^2}{n} \quad (I)$$

$$\overline{\langle S_i^\alpha \rangle \langle S_j^\beta \rangle} = \delta_{ij} \cdot \delta_{\alpha\beta} \overline{\langle S_i^\alpha \rangle^2} \quad (II)$$

$$\overline{\chi_{\alpha\beta}}(q) = \delta_{\alpha\beta} \frac{S^2 - Q}{nT} \quad (III)$$

(Q paramètre d'ordre d'Edwards - Anderson)

Bien sûr, la corrélation pour une distribution donnée serait différente de zéro. On trouve une valeur nulle du fait de la moyenne de telles corrélations sur toutes les configurations, ce qui est conçu

comme équivalent à une moyenne spatiale sur les différentes parties du réseau.

On remarque l'indépendance de χ en q ; Cette dernière relation (III) nous fait comprendre l'existence d'un point anguleux de la susceptibilité en champ nul dès que Q n'est plus nul.

La contribution magnétique à l'intensité diffusée dans une expérience de diffusion neutronique est proportionnelle à

$$\overline{S(q, \omega)} = \frac{1}{2\pi} \int dt e^{i\omega t} \sum_{ij} e^{iq(i-j)} \overline{\langle S_i^\dagger(0) S_j^\dagger(t) \rangle}$$

$$= \frac{2}{3} NQS(\omega) + \overline{\mathcal{G}_{inel}(q, \omega)}$$

$$I(q) = \int d\omega \overline{\mathcal{G}(q, \omega)} = \frac{2}{3} NS^2$$

Enfin, de façon générale, les fonctions de corrélation où un site apparaît un nombre impair de fois sont toutes nulles !

Notons au passage le comportement en loi de Curie au delà de la température de transition (résultat également obtenu par Domb).

Dans les modèles recuits, les deux sommations sont des sommations thermiques, les deux types de variables jouent un rôle analogue, celui de variables dynamiques. Définir un paramètre d'ordre pour un problème donné détermine une façon de sommer sur les configurations, de ne retenir qu'un sous-ensemble de celles-ci qui respecte la symétrie brisée. Dans le cas de l'I.S.G., les deux sommations jouent des rôles totalement dissymétriques et en plus la transformation locale de jauge lie ces deux types de variable très différentes.

La recherche d'une brisure de symétrie et donc en quelque sorte de la bonne façon de calculer F , s'avère donc très compliquée, celle consistant à sommer sur toutes les configurations faisant disparaître beaucoup de physique (la plupart des fonctions de Green nulles !).

REFERENCES

- (20) R. Bidaux, J.P. Carton, G. Sarma, Phys. Letters 58 A, 467 (1976)

6) SERIES HAUTES TEMPERATURES

La dimension critique supérieure pour les verres de spin semble être 6. Des calculs utilisant la méthode des répliques (Anderson, Les Houches 1978) le suggèrent nettement (du fait des termes cubiques que l'on obtient). Les analyses hautes températures pour une susceptibilité généralisée (22) $\chi_{SG} = \sum_{i,j} \overline{S_i S_j}^2$ montrent qu'elle diverge comme $|T - T_c|^{-\gamma}$ avec $\gamma \approx 1$ au dessus de la dimension 6. γ comme fonction de la dimension d croît continuellement de $d = 6$ à $d = 4$ et tend vers l'infini lorsque d tend vers 4. En dessous de $d = 4$, ils ne peuvent analyser leur série. Leurs calculs indiquent, nettement, un changement dans la nature du verre de spin mais ne donnent aucune indication sur la nature et même la présence éventuelle d'une phase verre de spin en dessous de $d = 4$.

C. Domb (21) a également réalisé des développements hautes températures sur des modèles d'Ising en deux et trois dimensions avec interactions aléatoires entre plus proches voisins avec probabilité égale d'être $\pm J$. Il trouve les singularités de l'énergie libre et de la dérivée seconde de la susceptibilité relativement au champ magnétique. La série pour la susceptibilité elle-même ne présente pas de singularité. Ceci ne veut pas dire qu'il n'y a pas de singularité pour la susceptibilité, la transition pouvant être due au croisement avec une autre branche de l'énergie libre.

REFERENCES

- (21) C. Domb, J. Phys. A Math. Gen 9, L 17 L 2 (1976).
(22) R. Fisch, A.B. Harris, Phys. Rev. Lett. 38, 785 (1977).

7) RENORMALISATION

Les méthodes de renormalisation dans l'espace réel (de position) se sont beaucoup développées parce qu'elles donnent d'assez bons résultats avec des efforts bien moindres que d'autres procédures plus sophistiquées.

Dans un milieu désordonné, le point fixe cherché, n'est pas une valeur d'un ou d'un nombre fini de paramètres mais un point fixe dans un espace fonctionnel : la distribution invariante des interactions. Dans la pratique, on doit se restreindre à des interactions entre plus proches voisins et supposer au cours du processus de renormalisation que les distributions restent d'un certain type (symétriques, somme de pics delta...). Selon le choix d'un type de distribution ou d'un autre, on peut obtenir des résultats fort différents, l'interprétation de ces résultats doit donc être faite avec prudence.

Young et Southern ⁽²³⁾ ont réalisé de telles renormalisations sur des spins d'Ising avec interactions entre plus proches voisins en deux et trois dimensions. Ils trouvent que le comportement qualitatif est essentiellement le même lorsque les distributions des probabilités sont symétriques pour chaque J_{ij} . En dimension trois, ils trouvent une transition verre de spin. La transition de phase est du second ordre, avec un exposant α grand en valeur absolue et négatif. En dimension deux, ils ne trouvent pas de transition de phase à température finie.

Récemment Young, Pfeuty et Southern ⁽²⁴⁾ ont étudié par des méthodes de renormalisation (Migdal) des modèles présentant à la fois des effets de percolation et de verre de spin, à température nulle. Près du seuil de percolation, une transition vers la phase verre de spin est obtenue pour une concentration très faible de liaisons antiferromagnétiques, sur le réseau cubique simple.

REFERENCES

- (23) A.P. Young and B.W. Southern, J. Phys. C 10, 2179 (1977).
- (24) B.W. Southern, A.P. Young and P. Pfeuty, ILL Preprint (1978).
- (25) G.S. Grest, J. Phys. C 10, L 629 (1977).
- (26) M. Plischke, D. Zoln, J. Phys. C 10, 4571 (1977).
- (27) C. Jayaprakash, J. Chalupa et M. Wortis, Phys. Rev. B 15, 1495.
- (28) A.P. Young and R.B. Stinchcombe, J. Phys C (Solid State Phys.) 9 4419 (1976).

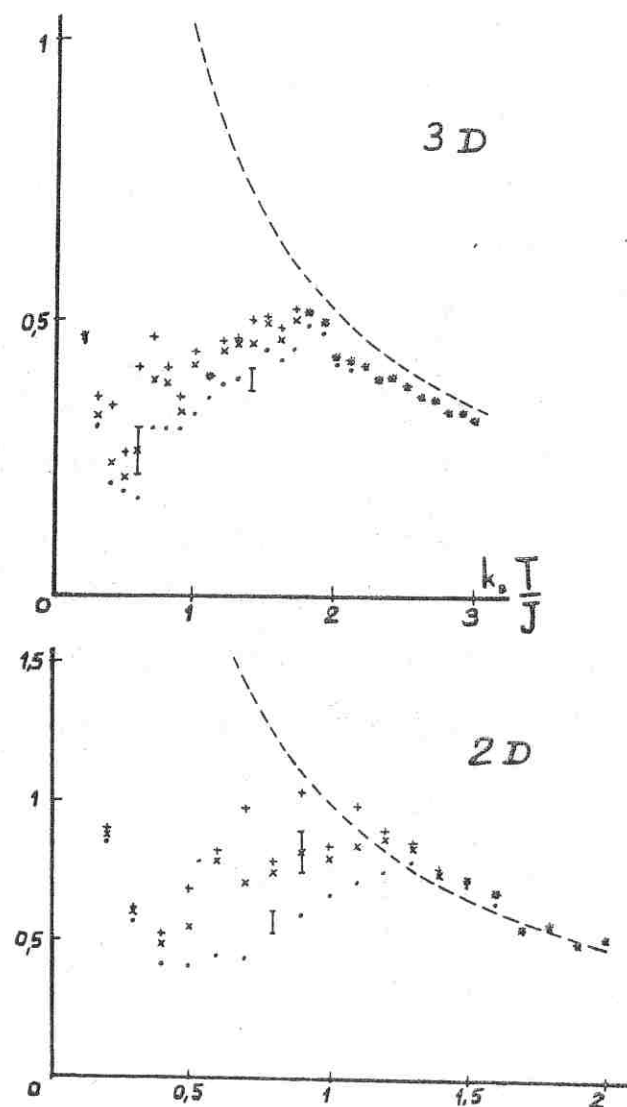


Figure 18,19 : Susceptibilité en deux et trois dimensions obtenues par simulation numérique : elle continue de croître pour des temps très longs.

8) SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Les expériences sur ordinateur permettent de mesurer des propriétés microscopiques d'échantillons de quelques milliers de spin. En particulier, la chaleur spécifique et la susceptibilité s'obtiennent à partir de moyennes dans le temps sur les fluctuations. Comme nous l'avons vu à propos de l'I.S.G., un paramètre d'ordre d'Edwards-Anderson Q non nul implique une susceptibilité différente de la loi de Curie en $1/T$. Numériquement, on observe facilement une telle déviation en toutes dimensions. Le problème étant de savoir si cette déviation est un effet d'équilibre ou pas.

Bray, Moore et Reed ⁽²⁹⁾ observent en dimension 2 et 3 que la susceptibilité continue de croître pour des temps étonnamment longs à basses températures (fig.18 et 19). Ils conjecturent que si l'on attendait suffisamment, on atteindrait la loi en $1/T$ caractéristique de la phase paramagnétique. Kirkpatrick ⁽³⁰⁾ a repris ces calculs sur des temps encore plus longs, il trouve que $\chi(T)$ sature à des valeurs en accord raisonnable avec les théories prévoyant une transition. En deux et trois dimensions, il semble préférable d'étudier les modèles avec des interactions $\pm J$ plutôt que des distributions gaussiennes (comme dans le cas de Bray, Moore et Reed. Les modèles $\pm J$ possèdent une densité finie de spins en champ nul à température nulle. Ainsi une partie de l'espace des phases peut être explorée rapidement dans ces modèles, cette exploration étant progressivement gelée aux basses

températures dans le cas de distributions continues. Le problème de stockage mémoire joue dans le même sens en faveur des modèles $\pm J$.

Pour ces modèles, Kirkpatrick (aussi bien en deux qu'en trois dimensions) trouve que $\chi(T)$ sature pour des valeurs clairement inférieures à $1/T$. L'énergie et la chaleur spécifique atteignent leurs valeurs limites dans des temps relativement courts. La distinction avec un paramagnétique est donc nette. La question plus subtile de savoir si le verre de spin à basses températures est une phase distincte ou quelque chose analogue à un verre ne sera probablement résolue que lorsqu'on aura une compréhension plus profonde des deux systèmes.

D'autres propriétés telles l'énergie de l'état de base, l'énergie de paroi ont également été étudiées par ces méthodes. Nous confrontons ces résultats à ceux obtenus par nous mêmes dans le chapitre III.

REFERENCES

- (29) A.J. Bray, M.A. Moore, and P. Reed, J. Phys. C 11 1187 (1978).
- (30) S. Kirkpatrick, Les Houches (1978).
- (31) P. Reed, M.A. Moore and A.J. Bray, J. Phys. C 11, L 139 (1978).
- (32) S. Kirkpatrick, Phys. Rev. B 16, 4630 (1977).
- (33) L.R. Walker, R.E. Wulstedt, Phys. Rev. Lett. 38, 544 (1977).

9) CONCLUSION : QUESTIONS BRULANTES POUR LE MODELE D'ISING : TRANSITION OU PAS ?

L'identification d'une dimension critique inférieure (en dessous de laquelle il n'y a pas de transition) pour un ordre verre de spin, pour $d = 4$ ou moins (si des verres de spin peuvent exister pour $d = 2$ ou $d = 3$) est un problème plutôt controversé à l'heure actuelle.

Donnons un résumé sommaire des divers résultats conjecturés, ou obtenus pour la dimension critique inférieure : la renormalisation dans l'espace réel donnerait plutôt $d = 2$ ou 3 (Kirkpatrick donne $d_c = 2,5$ - Les Houches 1978). Les simulations numériques suggèrent l'existence d'une transition en $d = 3$ et qu'en $d = 2$, il se passe "quelque chose". Donc, ici $d_c < 2$. Les séries hautes températures pour $x = 1/2$ voient dans $d = 4$ une dimension très particulière. Peut-être cela suggère-t-il l'existence de deux types de verres de spin. Bray et Moore dans trois articles différents avec des méthodes différentes (34,35) donnent $d_c = 4$. Anderson (et al ⁽³⁶⁾) donnent $d_c = 2$. Ces résultats contradictoires ne veulent pas dire que la plupart de ces résultats sont inexacts mais qu'au lieu d'indiquer la dimension critique inférieure, ils mettent le doigt sur des dimensions "particulières" où il se passe "quelque chose". C'est certainement le cas pour $d = 4$.

Notons le point de vue d'Alexander (Référence dans "Modèles périodiques") qui donne un argument, basé sur l'étude de certains modèles périodiques, totalement frustrés, pour affirmer que la dimension cri-

tique inférieure serait plus élevée pour le modèle d'Ising que pour le modèle XY, ce qui va à l'encontre de ce qui se passe dans les milieux non frustrés. Ainsi $d = 3$ apparaît dans le cas d'Ising frustré périodique comme une dimension "particulière".

REFERENCES

- (34) A.J. Bray and M.A. Moore (1977), J. Phys. F 7 L 333
- (35) A.J. Bray and M.A. Moore (1978) submitted to J. Phys. C
- (36) P.W. Anderson and C.M. Pond (1978) Phys. Rev. Letts 40 903.

CHAPITRE II

APPROCHES ANALYTIQUES DE MODELES BIDIMENSIONNELS OU UNIDIMENSIONNELS

Dans ce chapitre, nous rassemblons divers résultats analytiques classiques ou nouveaux sur des modèles d'Ising, en vue de leur application au problème de la frustration.

1) LA METHODE COMBINATOIRE DANS LE MODELE D'ISING

Pour résoudre le modèle d'Ising en dimension deux, il y a essentiellement deux manières de faire : l'une algébrique (Onsager, Kaufmann) l'autre combinatoire (Kac^v et Ward, Sherman, Vдовitchenko^o) (37,38). Nous classons la méthode de Kasteleyn transformant la combinatoire de Kac^v et Ward en une combinatoire de dimères dans cette deuxième catégorie). Exposons rapidement cette méthode combinatoire.

Calculer la fonction de partition d'un modèle d'Ising revient à calculer $\sum_{\{S_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + S_i S_j \text{th} J_{ij})$ (I) où S_i est un spin d'Ising et J_{ij} le couplage entre premiers voisins.

Les termes du déterminant $\det (\delta_{ij} - \text{th} J_{ij} M_{ij})$ (où M_{ij} désigne la matrice d'adjacence du réseau) correspondent à une permutation bien précise, c'est-à-dire à un produit de cycles. Or, un cycle ne sera pas autre chose qu'un terme du type $\text{th} J_{i_1 i_2} \dots \text{th} J_{i_n i_1} M_{i_1 i_2} M_{i_2 i_3} \dots M_{i_n i_1}$,

c'est-à-dire un des termes du développement de (I). En fait, c'est une matrice plus large qui donne l'identification avec les termes de (1) avec leur bon poids : $M_{i,\alpha ; j,\beta} = \text{th} J_{ij} M_{ij} \cdot A_{\alpha\beta} S_{i+\alpha,j}$ où α est l'un des quatre vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, -\vec{i}, -\vec{j}$ (ceci pour le réseau carré).

L'identification exacte est un problème délicat de combinatoire résolu par Sherman⁽³⁷⁾. L'identification est vraie pour une distribution de liaisons J_{ij} prenant des valeurs quelconques : positives, négatives, nulles, et même non périodiques. Le caractère général de ce résultat n'a pas, selon nous, été suffisamment exploité.

Ce que nous retiendrons, c'est que cette méthode combinatoire s'étend aux milieux désordonnés et constitue ainsi un point de départ intéressant, en exprimant la fonction de partition pour une configuration quelconque sous une forme fermée.

Essayons à partir de ce résultat exact d'engendrer des approximations.

$-\beta F\{J\} = \ln Z\{J\}$ admet un développement diagrammatique:

$$\ln Z = \begin{array}{c} \square \\ A \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \square \\ B \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \square \\ C \end{array} + \dots$$

Essayons d'effectuer la moyenne sur les configurations de F pour le cas où la probabilité d'avoir $-J$ est x et celle d'avoir $+J$ est $1-x$.

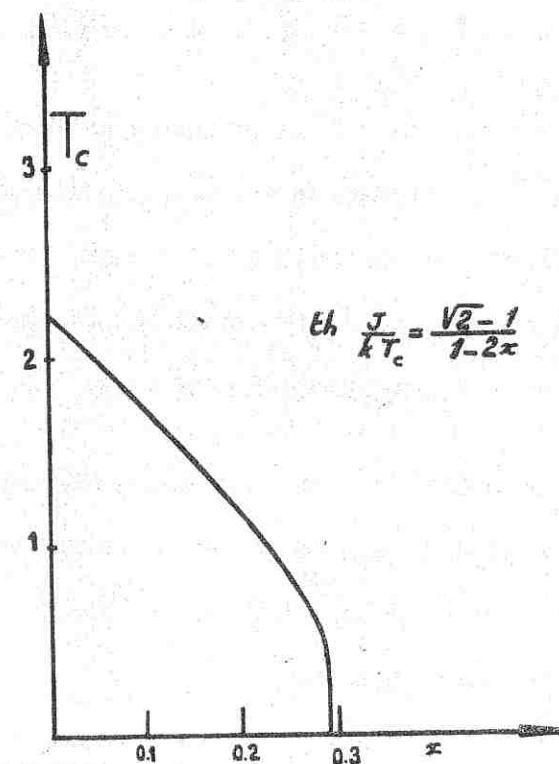


Figure 20 : Diagramme de phase dans une hypothèse de modèle recuit.

Un chemin de longueur l où chaque liaison n'intervient qu'une seule fois donnera une contribution moyenne de :

$$x^l (-thJ)^l + C_1^l x^{l-1} (1-x) (-thJ)^{l-1} thJ + \dots$$

$$= (1-2x)^l (thJ)^l.$$

Posons $z = thJ$. Notre approximation consiste à remplacer dans l'expression finale obtenue par Onsager z par $z' = z(1-2x)$. Une telle approximation sous-estime la contribution des diagrammes du type (C) où certaines liaisons interviennent deux fois.

Une telle approximation n'est pas sans rappeler l'approximation Bethe-Peierls : celle-ci est une approximation de champ moyen, où l'on considère un motif élémentaire (un spin et ses premiers voisins), où l'on traite correctement la statistique à l'intérieur du motif et où comme toutes les théories de champ moyen, on essaie d'obtenir une équation self-consistante. Le calcul de la susceptibilité, par exemple, par cette méthode donne $X = \frac{x_0}{1-(Z-1)thK}$ (Z = nombre de plus proches voisins). Pour un milieu désordonné, on obtient la même expression mais en remplaçant thK par $\langle thK \rangle$. En l'occurrence, dans notre modèle, on remplace thK par $\langle thK \rangle = (1-x)thK + x(-thK) = (1-2x)thK$. C'est le contenu de notre approximation. Néanmoins, il convient de remarquer que si l'on tend vers le modèle pur ($x \rightarrow 0$) Bethe-Peierls tend vers Bethe Peierls pur, c'est-à-dire un champ moyen, alors que nous tendons vers la solution exacte d'Onsager du modèle d'Ising en deux dimensions.

La température critique est obtenue pour $z' = \sqrt{2} - 1$. Ceci nous permet de tracer un diagramme de phase que l'on peut comparer avec d'autres diagrammes de phase de modèles recuits (fig 20). A tempéra-

ture nulle, la concentration critique est $x_c \sim 0,3$ dans cette approximation, bien supérieure aux valeurs des études numériques.

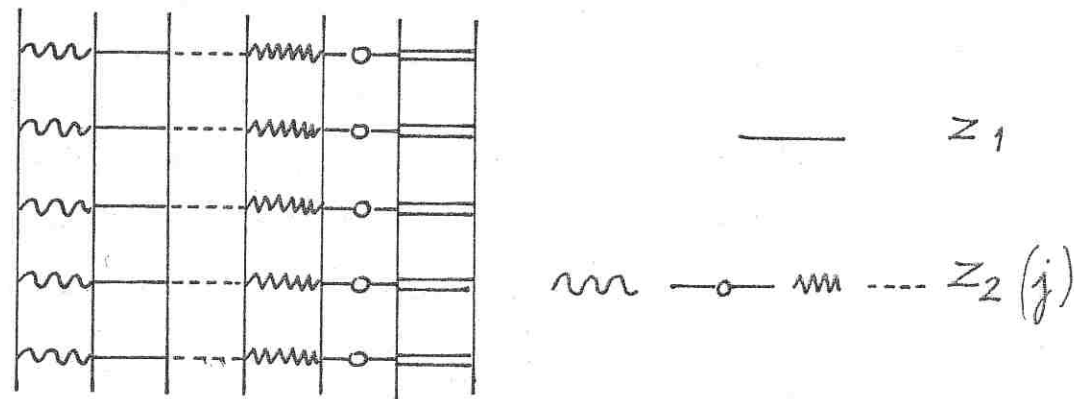
En fait, et c'est le point très important, cette approximation revient exactement à calculer $\ln \langle Z \rangle$ (modèle pseudo-recuit : on impose la concentration de liaisons antiferromagnétiques par l'intermédiaire d'une probabilité) (voir appendice 1). Une approximation analogue existe en percolation et correspond à $z' = (1-p)z$. On peut essayer de raffiner cette approximation (en comptant correctement les graphes retracés un nombre pair de fois). De tels ajustements à partir de la solution d'Onsager conduiront toujours aux comportements critiques du modèle ferromagnétique d'Onsager, ce qui limite l'intérêt de cette approche.

REFERENCES

- (37) S. Sherman, J. Math. Phys. 1, 202 (1960).
- (38) N. Vdovitchenko, Journ. Phys. URSS 48, 526 (1965).

Modèle de Mc Coy et Wu

Figure 21



Modèles des rubans.

Figure 22

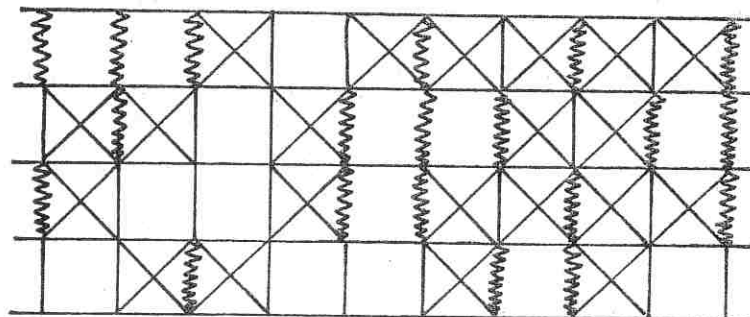
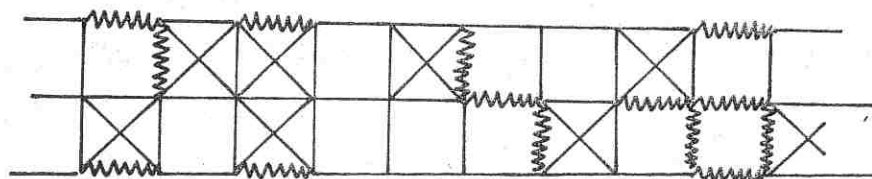


Figure 23 : Modèles des rubans.

2) LES MODELES DE RUBAN

Il est intéressant de regarder des modèles qui ne souffrent pas de cette dernière restriction et peuvent donner des indications sur le comportement critique en présence de désordre.

A) Le modèle de Mc Coy et Wu

Les résultats exacts sur les problèmes désordonnés sont rares ; nous signalons cependant ce modèle qui a longtemps donné des idées inexactes parce que considéré comme représentant d'un désordre quelconque. Dans ce "random Ising model", Mc Coy et Wu (39) considèrent un modèle bidimensionnel où les liaisons verticales par exemple sont toutes prises égales à une certaine valeur J positive, les liaisons horizontales étant identiques dans les mêmes colonnes mais étant aléatoires de colonnes en colonnes (voir fig.21).

Les calculs sur ce modèles sont donnés en appendice ; ils montrent comment un traitement correct du désordre conduit à des équations fonctionnelles. Mc Coy et Wu ont regardé ce modèle pour une distribution particulière $\mu(\lambda)$ des liaisons ; ils obtiennent qu'il n'y a plus de singularité dans la chaleur spécifique, celle-ci étant parfaitement analytique en température. Les exposants critiques n'ont plus de signification ! Bien sûr, ce modèle est très particulier puisqu'on brise l'invariance par translation selon une seule direction, il a le mérite de mettre en question l'existence des exposants critiques dans un modèle désordonné.

Ceci pose la très importante question de savoir si effectivement les transitions de phase sont les mêmes dans les systèmes faiblement désordonnés et pour les systèmes homogènes. Il existe un argument dû

à Harris ⁽⁴⁰⁾ pour l'existence d'une transition nette sous certaines conditions. Si l'exposant $\alpha < 0$, on prévoit les mêmes comportements critiques que pour le système homogène. Ces arguments ont le mérite d'expliquer l'anomalie du modèle de Mc Coy et Wu : le désordre non local que l'on y introduit réduit la dimension d'une unité ; ainsi, au lieu du signe de $\alpha = 2 - d\nu$, on est amené à regarder celui de $2 - d'\nu = 2 - (d-1)\nu = \alpha + \nu$, qui est positif.

B) Le modèle de Fan et Mc Coy est un modèle très proche du point de vue des techniques employées, du modèle précédent. On considère des spins d'Ising en champ uniforme avec une énergie d'échange aléatoire (le tout en dimension un). On aboutit à une équation fonctionnelle ⁽⁴¹⁾. On a donc formellement le résultat.

C) Les modèles de ruban.

Le modèle de Mc Coy et Wu n'est pas frustré. C'est en ayant à l'esprit le problème de la frustration qu'a été entreprise une recherche analytique exacte (à température nulle et avec une distribution $P(J) = x\delta(J+J_0) + (1-x)\delta(J-J_0)$ sur des modèles de rubans (il s'agit de chaînes d'Ising en nombre fini couplées entre elles ; voir fig. 22 et 23). L'intérêt de ces modèles est qu'en faisant croître le nombre de chaînes, on voit littéralement "pousser" les singularités, non analyticités, etc... C'est particulièrement spectaculaire dans le cas ferromagnétique d'Onsager ⁽⁴²⁾. Le plus simple modèle est une unique chaîne de spins dans un champ uniforme (J_{ij} aléatoire).

Ce modèle a fait l'objet d'un article de B. Derrida, J. Vannimenus

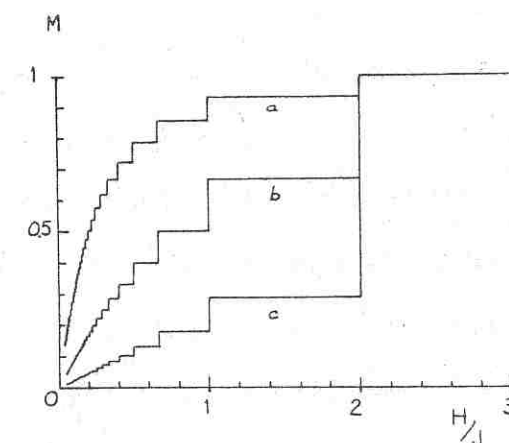


Figure 24 : Aimantation du modèle d'Ising unidimensionnel en champ uniforme avec J_{ij} aléatoire.

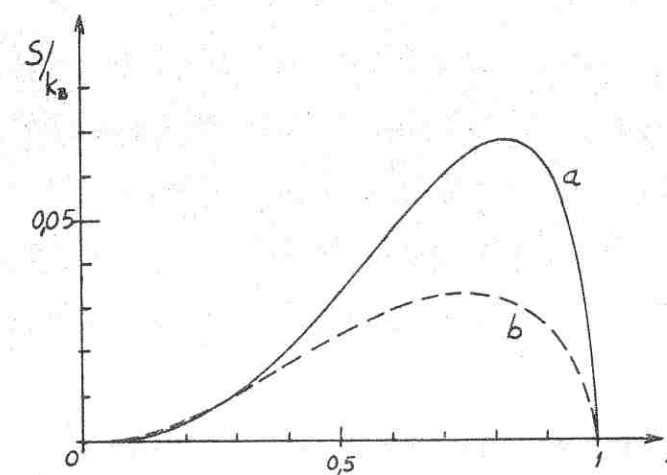


Figure 25 : Entropie pour Ising unidimensionnel en champ uniforme avec J_{ij} aléatoire en fonction de la concentration de liaisons négatives.

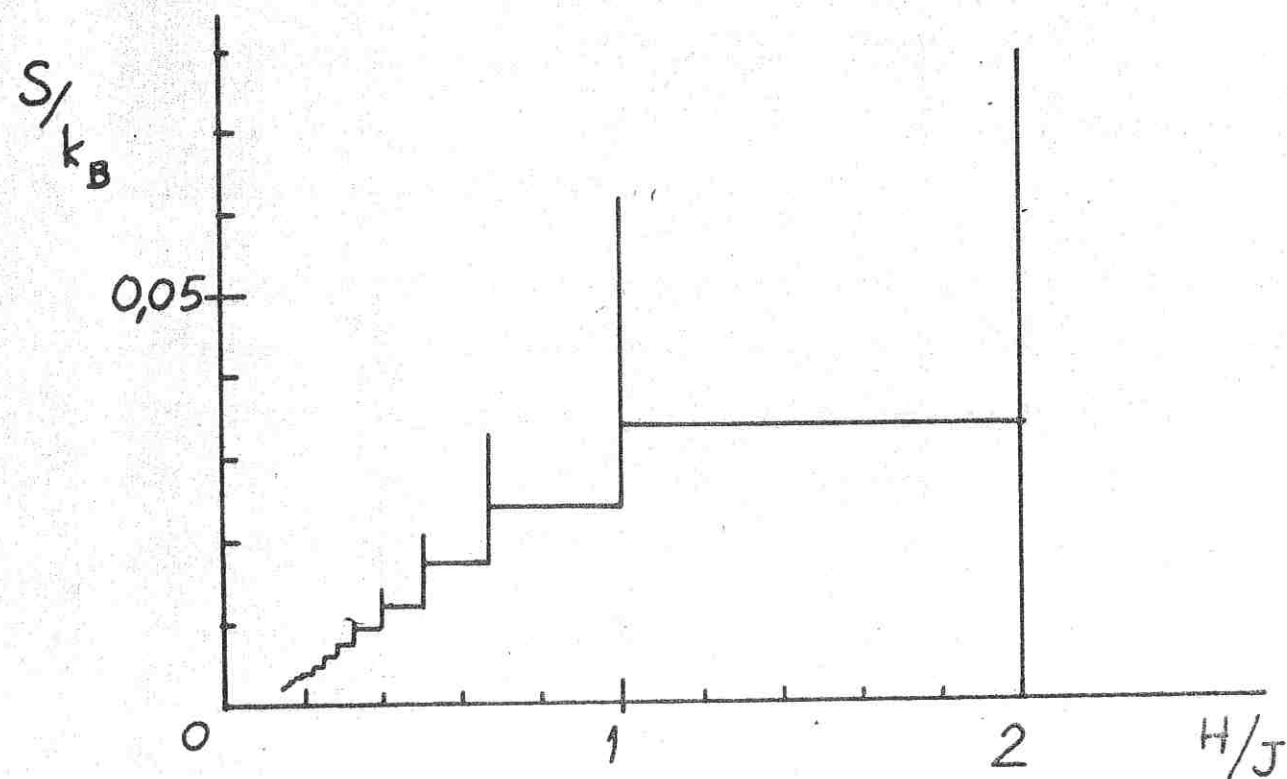
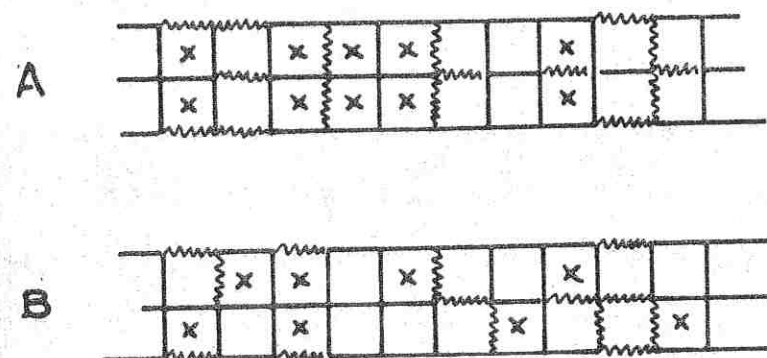


Figure 26 : Entropie pour Ising unidimensionnel en champ uniforme avec J_{ij} aléatoire en fonction du champ.

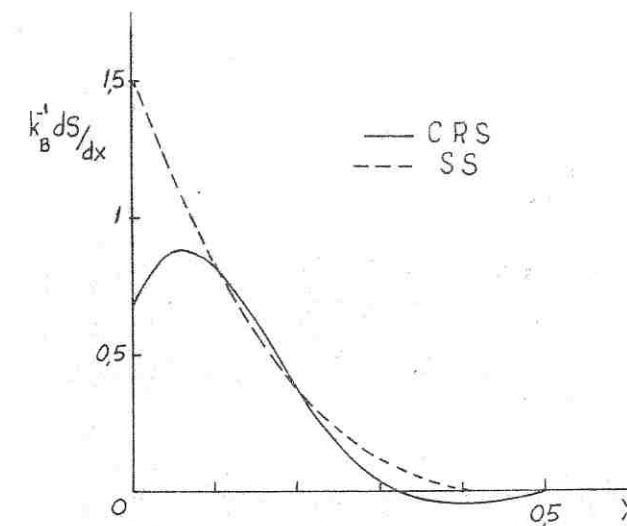


Figure 27 : Dérivée par rapport à la concentration de l'entropie du modèle constitué par deux chaînes d'Ising
C.R.S. : Completely random streap
S.S. : Symetric streap

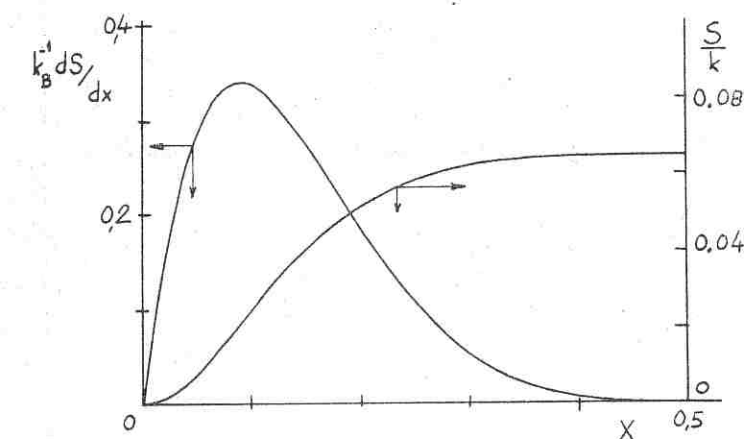


Figure 28 : Entropie et dérivée de l'entropie par rapport à la concentration x .

dans le cas d'un échantillon
carré fini $n \times n$

et Y. Pomeau (44). Les calculs figurant en appendice, nous ne donnons que les résultats :

L'aimantation obtenue pour le modèle avec champ uniforme et J_{ij} aléatoire en dérivant l'énergie par rapport au champ magnétique subit à concentration x donnée un nombre infini de discontinuités mais néanmoins la susceptibilité à température nulle a une limite $X(T=0) = \lim_{H \rightarrow 0} M/H = \frac{1-x}{x}$. Bray et Moore ont montré que cette même susceptibilité est exactement J/kT en champ nul. Il n'y a pas de continuité lorsque la température tend vers zéro (les limites $T \rightarrow 0$ et $H \rightarrow 0$ ne commutent pas). On peut interpréter ceci en l'associant à la possibilité pour de très grandes associations " de spins de renverser même en champs très faibles. On a donc sur un tel système désordonné un effet quasi-collectif.

L'entropie présente un maximum en x à champ donné (fig. 25) et surtout l'entropie est une fonction en escalier en fonction du champ (sauf pour $2J/H$ entiers où la dégénérescence est beaucoup plus grande, traduisant le fait qu'elle n'est pas seulement due à un ensemble de configurations comme dans le cas général) (fig. 26).

Pour le modèle avec deux chaînes, on a tracé $\frac{dS}{dx}$ (fig. 27) au lieu de l'entropie, pour insister sur un point que les auteurs de ces calculs pensent significatifs. Ils suggèrent que le maximum observé s'affirme avec de plus grandes valeurs de u et finalement devient une singularité à une valeur critique x_c dans le cas bidimensionnel.

Pour le modèle bidimensionnel désordonné en champ, on s'attend à

observer des singularités analogues à celles décrites par la figure 12, mais avec des points d'accumulation pour des valeurs non nulles du champ. Certains de ces points pourraient donner naissance à une ligne critique.

REFERENCES

- (39) Mc Coy et Wu, Phys. Rev. 176, 631 (1968).
- (40) T. Lubensky, Les Houches, 1978.
- (41) C. Fan et Mc Coy, Phys. Rev. 182, 614 (1969).
- (42) E.A. Ferdinand, E.M. Fisher, Phys. Rev. 185, 832 (1970).
- (43) J.F. Fernandez, Phys. Rev. B (Comments and Addenda) 16, 5125 (1977).
- (44) B. Derrida, J. Vannimenus, Y. Pomeau : "Simple frustrated systems : chains, strips and squares". To be published in J. of Physics C (1978).
- (45) A.J. Bray M.A. Moore and P. Reed J. Phys. C 11 1187 (1978)

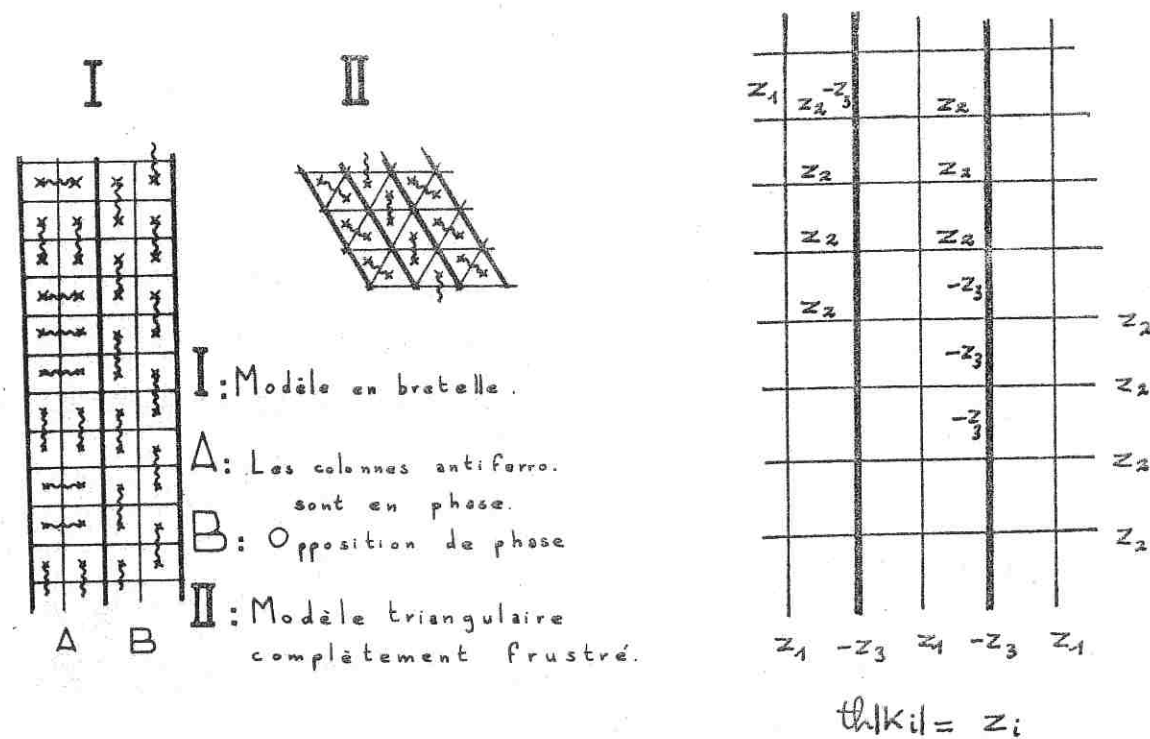


Figure 29 : Modèles périodiques complètement frustrés.

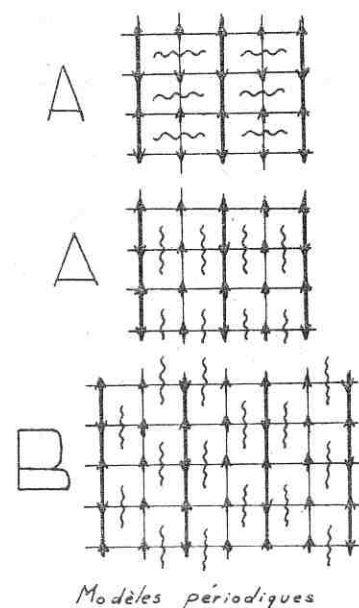


Figure 30 : Les colonnes antiferromagnétiques peuvent être soit en phase (A) soit en opposition de phase.

3) MODELES PERIODIQUES

L'étude des modèles frustrés désordonnés s'avère très difficile, comme le montre l'étude précédente sur le problème des rubans.

Dans ces conditions, il est intéressant d'étudier la frustration en tant que telle dans des modèles périodiques (pour lesquels les chances de solution exacte sont meilleures). Cet examen des systèmes frustrés périodiquement peut être utile pour faire la part du désordre et de la frustration.

Les modèles à interactions toutes de même signe sont bien compris, mais ce n'est pas le cas quand les liaisons ont des signes différents, même sur des modèles périodiques. En principe, il suffit d'appliquer les méthodes connues (matrice de transfert, Pfaffiens...) mais cette approche mène à des calculs pénibles et peu de travail a été effectué. Ces systèmes présentent très certainement des effets physiques nouveaux liés à la frustration et leur étude peut aider à dégager des concepts intéressants.

Le "odd model" de Villain est le plus simple de tous ces modèles. Il peut être engendré par la configuration de liaisons donnée (fig. 29) mais en prenant $z_1 = z_2 = z_3$. Dans le cas triangulaire, il est engendré d'une façon plus simple qui respecte la symétrie du réseau (fig. 29).

Dans le modèle bidimensionnel de Villain, il n'y a pas de transition⁽⁴⁶⁾ mais si on brise la symétrie de ce modèle, on obtient alors une transition à une température non nulle (modèle en bretelle, voir plus loin). Le calcul

de la fonction de partition se complique vite avec le motif de base. On aimerait donc avoir des critères pour caractériser le comportement de ces systèmes frustrés.

Un critère communément admis pour déterminer s'il existe ou non une transition est l'annulation de l'énergie d'interface à $T = 0$. En effet si c'est le cas, on peut faire passer un interface entre 2 spins éloignés, il ne peut donc y avoir d'ordre à longue distance.

Réciproquement, on peut voir (appendice n° 8) que l'énergie d'interface est proportionnelle à $1/\xi^+$ en deux dimensions. L'annulation de l'énergie d'interface signifie que ξ^+ diverge

Une autre information moins décisive est la dégénérescence du fondamental $S = k \ln W$ où W est le nombre de configurations ayant la même énergie que le fondamental. Si $W \sim \alpha^N$ avec $1 < \alpha < 2$, on pourrait penser que la dégénérescence est trop importante, pour avoir un ordre, en particulier un ordre à longue portée. Si $W \sim Cte$ ou N^p ... alors l'entropie est nulle, ce qui semblerait favorable à l'existence d'une transition.

Nous allons voir qu'il faut reconsidérer ces deux critères sur le modèle de la figure 29 avec $Z_1 = Z_2 \neq Z_3$ ($Z_1 = \tanh K_1$, $Z_2 = \tanh K_2$, $Z_3 = \tanh K_3$. nous appelons un tel modèle, modèle en bretelle) : il y a bien un ordre, mais il est subtil.

Supposons $Z_3 > Z_1 = Z_2$. Dans les divers fondamentaux, il y aura forcément un ordre antiferromagnétique sur les colonnes antiferromagnétiques

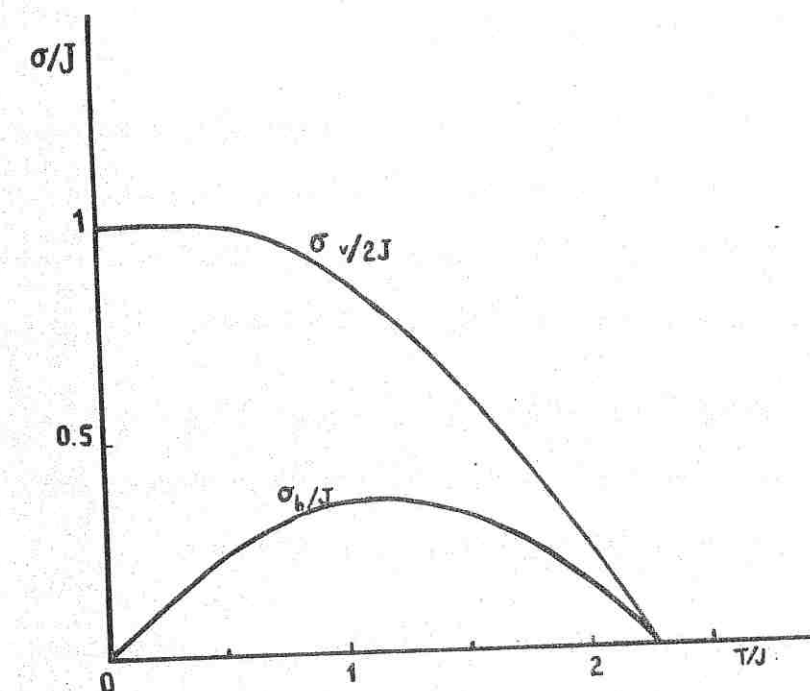


Figure 31 : Energie d'interface horizontale et verticale dans le cas du modèle en bretelle.

(voir fig. 29, 30). Mais en passant d'une des colonnes à la suivante, on peut être soit en phase (fig. 29, A) soit en opposition de phase (fig. 29, B). La probabilité d'avoir deux de ces colonnes de hauteur n en phase est (s'il y en a $m-1$ intercalées entre elles) $\frac{(\lambda^n - 2)^m}{\lambda^{n+2}}$ avec $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, elle tend vers 1 lorsque m et n tendent vers l'infini simultanément. A température basse, il existe un ordre à longue distance pour les colonnes. A température nulle, retournons tous les spins d'une colonne antiferromagnétique. Cela ne modifiera pas l'énergie (on restera à l'énergie du fondamental) mais cela modifiera localement les liaisons qui sont frustrées. En particulier, si l'on prend des conditions antipériodiques, à gauche et à droite du réseau, on voit que l'énergie de paroi correspondante est nulle. L'énergie de paroi est nulle dans une direction, c'est vrai, mais la probabilité associée à de telles transitions phase $\rightarrow$ opposition de phase est très faible (nulle à la limite thermodynamique). Le calcul de l'énergie d'interface pour ce modèle a été effectué. Nous avons obtenu :

$$\frac{\sigma_v}{T} = \frac{K_1 - K_3}{2} - K_2^* \quad (\text{correspondant à un interface vertical}).$$

$$\frac{\sigma_h}{T} = K_1^* + K_3^* - \text{Argsh}(\text{ch} 2K_2 \cdot \text{sh}(K_1^* - K_3^*))$$

(K^* étant le couplage dual de K , défini par $e^{-2K^*} = \text{th} K$)

A basses températures, $K^* \sim e^{-2K}$ et donc

$$\frac{\sigma}{T} \sim e^{-2K_1} + e^{-2K_3} - \text{Argsh} \left(\frac{e^{2K_2}}{2} (e^{-2K_1} - e^{-2K_3}) \right)$$

Si $Z_3 > Z_1 = Z_2$ ($K_3 = K_1 = K_2$), l'on a

$$\frac{\sigma}{T} \sim -\text{Argsh}(1/2) = -\ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

Figure 32 : Modèle périodiquement frustré.

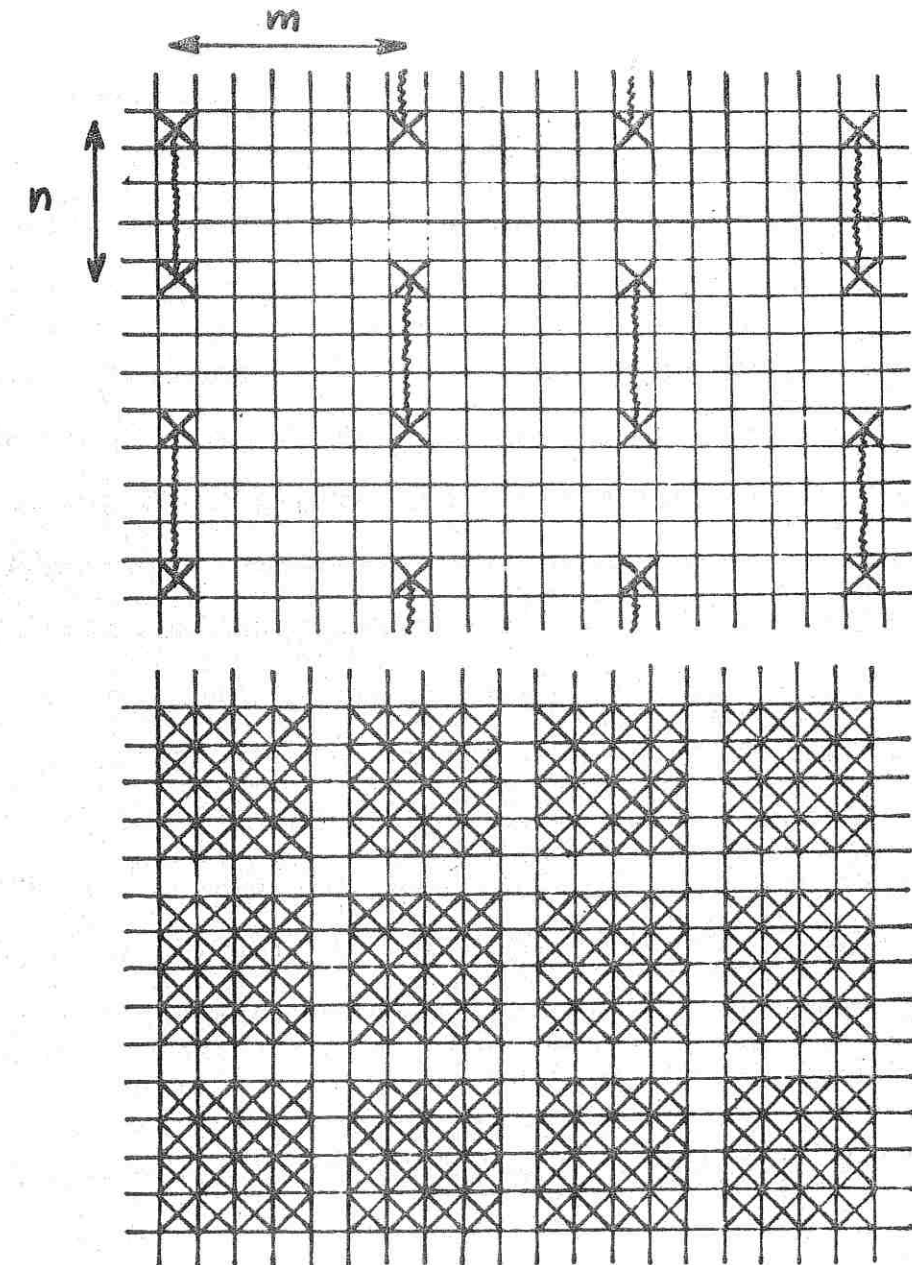


Figure 34 : Les plaquettes forment des blocs : l'entropie est importante mais locale.

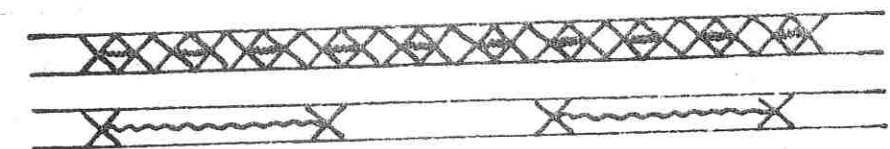


Figure 33

Ainsi la pente à l'origine correspond bien à l'argument sur les probabilités donné ci-dessus.

Une notion semble apparaître lorsqu'on parcourt ces modèles : c'est celle d'entropie associée à la création d'un défaut (47). Nous avons vu sur cet exemple que créer une paroi ne coûtait pas d'énergie mais diminuait nettement le nombre de configurations accessibles : si créer une paroi ne coûte pas en énergie, cela coûte en entropie. On peut en quelque sorte parler de l'entropie négative associée à une paroi.

Considérons maintenant d'autres modèles périodiques. Regardons le modèle défini par les figures (32) (m différent de n ou $m = n$). Trouver l'énergie du fondamental revient à regarder les longueurs de corde liant les couples de plaquettes frustrées. Considérons une ligne où toutes les plaquettes sont frustrées et une, où les plaquettes sont régulièrement espacées. Il est facile de se convaincre que l'énergie associée à ces deux configurations est la même (fig.33). On en déduit facilement que l'énergie par spin du fondamental du modèle de la figure est $\frac{E_0}{\sup(m,n)}$ en appelant E_0 l'énergie du fondamental du modèle tout frustré. L'entropie par spin due aux cordes dans le modèle " $m = n$ " est la même que dans le modèle tout frustré de Villain, mais divisée par n . Il y a peu d'entropie dans un tel modèle, (dans les modèles du type de celui de la figure 32, l'entropie par spin = 0).

Par contre, le modèle de la figure (34) où les plaquettes frustrées forment des blocs possède une énergie de paroi finie et en conséquence possédera certainement une transition en dépit d'une entropie aussi importante sinon plus. Dans ce modèle, l'entropie est surtout due à la

dégénérescence à l'intérieur des divers blocs. C'est une entropie de type local. Dans les deux modèles précédents, elle est due à des effets collectifs. Si l'entropie est une mauvaise information, c'est qu'elle mélange les effets sur les petits amas et les effets collectifs.

Pour ces modèles périodiques, la concentration de liaisons négatives ou bien de plaquettes frustrées est une grandeur d'intérêt tout à fait secondaire ; ce qui importe, c'est le motif selon lequel elles s'arrangent. Une même concentration peut pour un motif donner une transition et pour un autre ne pas en donner.

Pour un motif, la dégénérescence de l'état de base sera importante et inexistante pour un autre motif.

Enfin, l'annulation de l'énergie de défaut à $T=0$ ne constitue pas à elle seule un critère sur l'existence d'une transition, contrairement à un argument avancé par Bray, Moore et Reed.

Le modèle en bretelle que nous avons discuté en premier constitue un contre-exemple à cet argument, il montre que l'entropie des défauts devient importante si leur énergie s'annule.

REFERENCES

- (46) J. Villain, J. Phys. C 10 1717 (1977).
- (47) B. Derrida, J. Vannimenus, J.M Maillard, S. Kirkpatrick, J. Phys. Lettres De: (1978).

problème se scinde pour les diverses valeurs de q . Dans notre problème d'interface, nous nous restreignons donc à $T(q=0 \text{ ou } \pi) = T_1(0 \text{ ou } \pi)$

$T_2(0, \pi)$. Dans le cas du modèle en bretelle pour un interface vertical

(voir fig 35) la transformée de Fourier distingue les sites pairs et impairs puisqu'il y a une périodicité de longueur deux. Il y a donc deux opérations de fermions a^+ et b^+ (*)

$$T = e^{K_2(a^+ - a)(b^+ + b) + K_4(b^+ - b)(a^+ + a)} \\ \times e^{-2K_1^*(a_0^+ a_0 - 1/2)} e^{-2K_3^*(b_0^+ b_0 - 1/2)} \cdot (-1)^{b_0^+ b_0}$$

T est une matrice 4×4 qui est scindée sur l'espace vectoriel avec un nombre pair de particules ($10 >$ et $a^+ b^+ 10 >$) et l'espace vectoriel avec un nombre impair.

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \text{ matrice diagonale } \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \text{ et} \\ B = \begin{pmatrix} \text{ch} 2K e^{K_1^* - K_3^*} & -\text{sh} 2K e^{K_3^* - K_1^*} \\ \text{sh} 2K e^{K_1^* - K_3^*} & -\text{ch} 2K e^{K_3^* - K_1^*} \end{pmatrix}$$

B a deux valeurs propres e^γ et $-e^{-\gamma}$

D'après le raisonnement précédent de Watson, il faut considérer la plus petite excitation qui, on le constate, est la différence :

$$\alpha - \gamma = K_1^* + K_3^* - \text{Argsh}(\text{ch} 2K_2 \text{sh}(K_1^* - K_3^*)) \quad (I)$$

(*) (Le lecteur peu familier avec ces notions pourra se reporter à l'article de T.D. Schultz, D.C. Mattis et E.H. Lieb (55)).

	K_1	K'_1		
K_2		K'_2		
	K_3	K'_3		
K_4		K'_4		
	K_1	K'_1	K_1	K'_1
K_2		K'_2	K_2	K'_2
	K_3	K'_3	K_3	K'_3
K_4		K'_4	K_4	K'_4
	K_1	K'_1	K_1	K'_1

Figure 36 : Le motif de base contient huit paramètres.

Effectuons maintenant le calcul d'un interface d'un système un peu plus compliqué (voir fig. 36)

Il faut maintenant diagonaliser $T.T'$ avec :

$$T = \begin{bmatrix} e^{+(K_1^* + K_3^*)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-K_1^* - K_3^*} & 0 \\ 0 & 0 & e^{K_1^* - K_3^*} \\ 0 & 0 & e^{+K_3^* - K_1^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ch}(K_2 - K_4) & \text{sh}(K_2 - K_4) & 0 & 0 \\ \text{sh}(K_2 - K_4) & \text{ch}(K_2 - K_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch}(K_2 + K_4) \text{sh}(K_2 + K_4) \\ 0 & 0 & \text{sh}(K_2 + K_4) \text{ch}(K_2 + K_4) \end{bmatrix}$$

et $T' = T$ en remplaçant $K \rightarrow K'$

On trouve après calcul

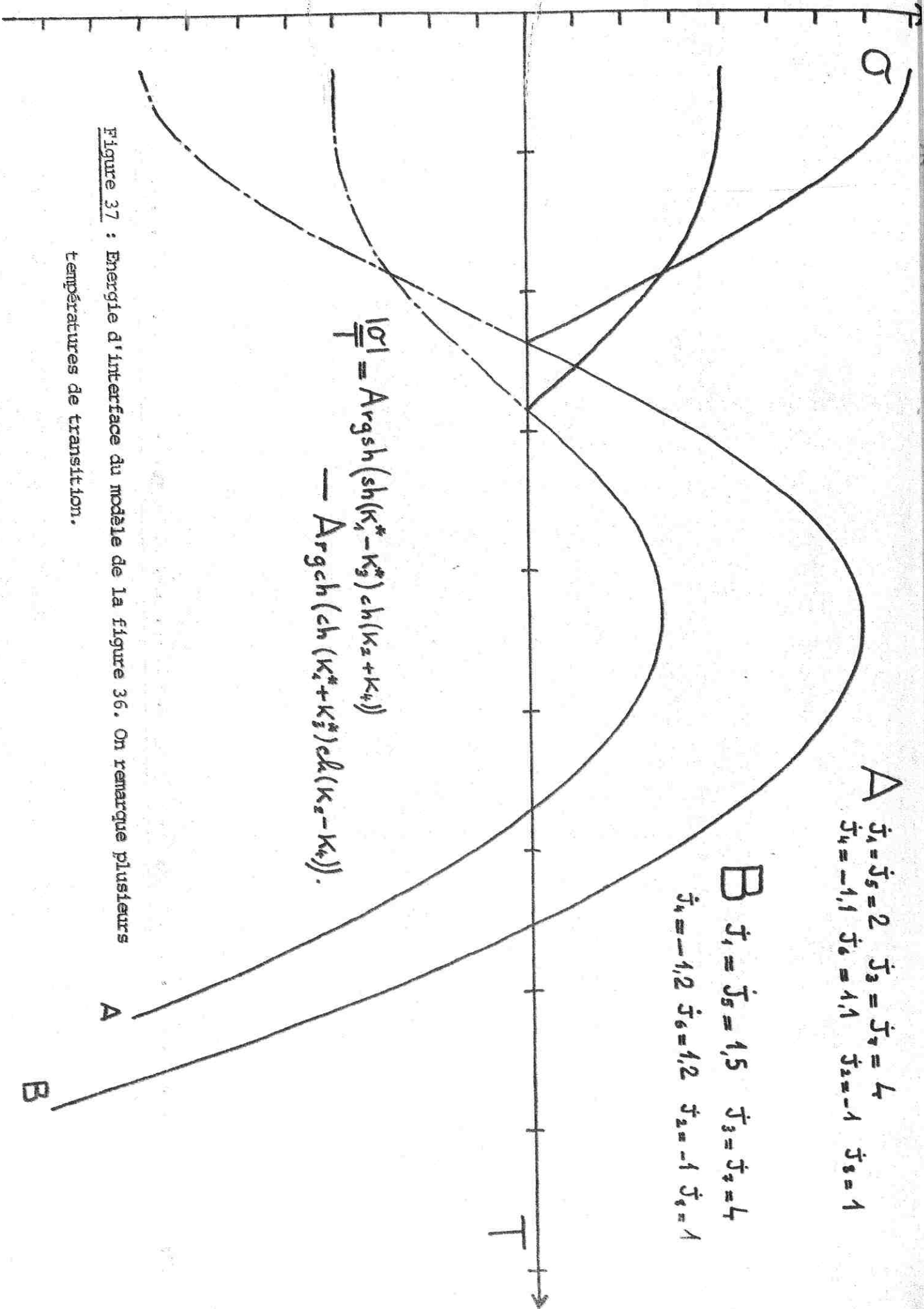
$$Y = Y_1 - Y_2$$

$$\text{ch} Y_2 = \text{ch}(K_1^* - K_3^* - K_1'^* - K_3'^*) \text{ch}(K_2 + K_4) \text{ch}(K_2' + K_4') \\ + \text{ch}(K_1^* - K_3^* - (K_1'^* - K_3'^*)) \text{sh}(K_2 + K_4) \text{sh}(K_2' + K_4')$$

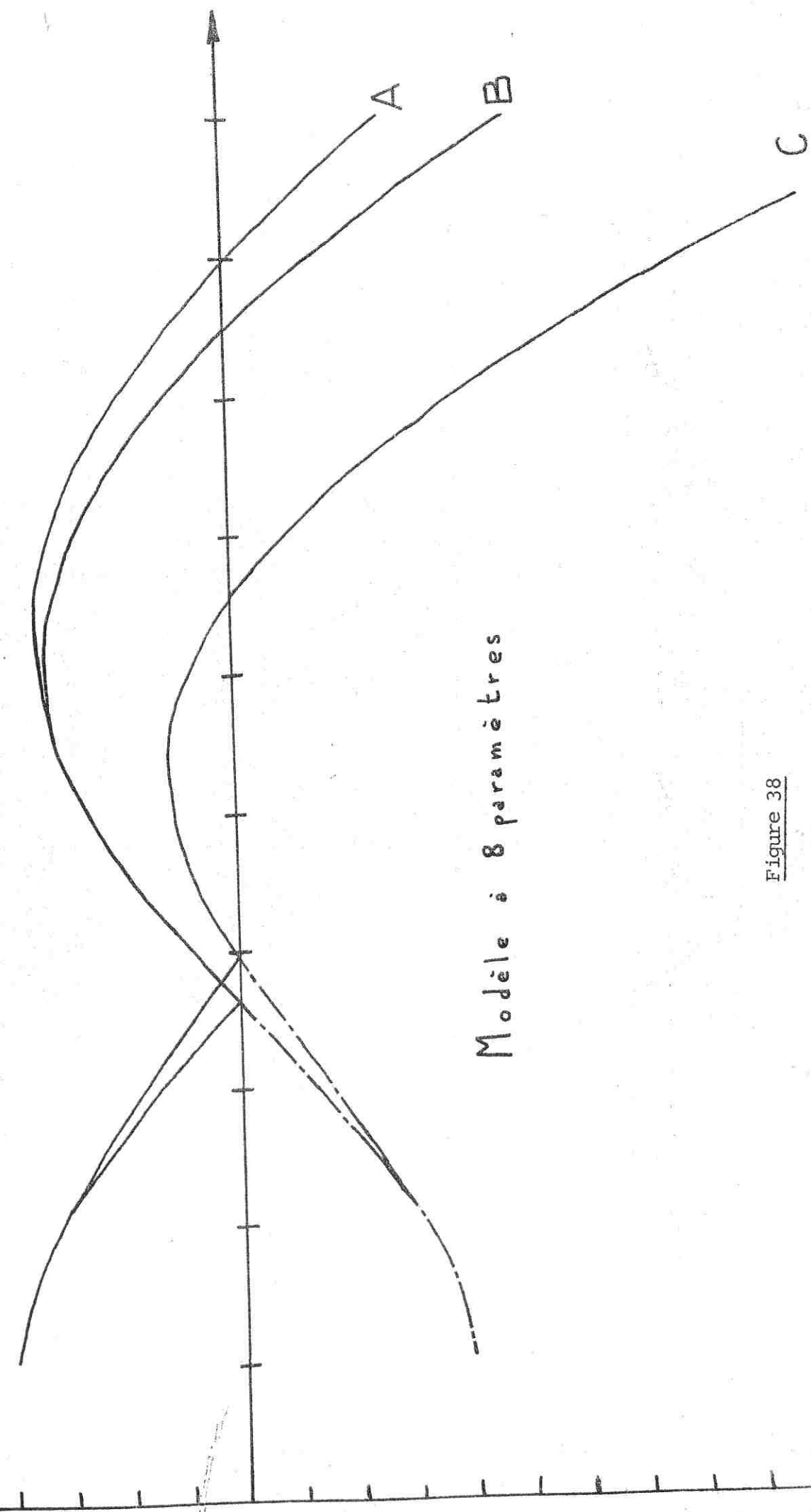
$$\text{ch} Y_1 = \text{ch}(K_1^* + K_3^* + K_1'^* + K_3'^*) \text{ch}(K_2 - K_4) \text{ch}(K_2' - K_4') \\ + \text{ch}(K_1^* + K_3^* - (K_1'^* + K_3'^*)) \text{sh}(K_2 - K_4) \text{sh}(K_2' - K_4')$$

En fait cette expression donne σ au signe près : le comportement à basse température permet de déterminer le signe.

Il est facile de voir qu'il n'est pas nécessaire de faire un nouveau calcul pour avoir l'interface dans la direction perpendiculaire pour avoir l'interface dans la direction perpendiculaire. Il suffit de faire une permutation sur les huit paramètres. On peut alors vérifier après un calcul assez long que les deux interfaces s'annulent bien pour les mêmes températures.



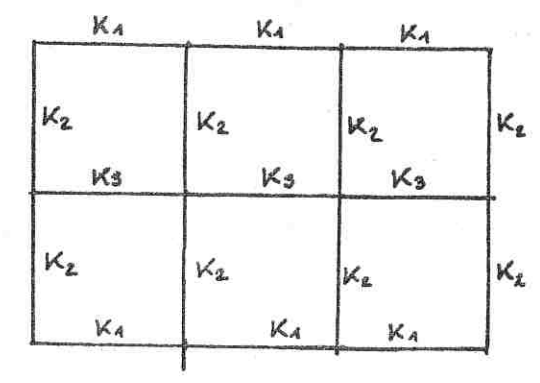
σ
 A $J_1 = 1$ $J_2 = -1$ $J_3 = 2$ $J_4 = -1,1$ $J_5 = 2$ $J_6 = 1,1$ $J_7 = 50$
 B mêmes valeurs sauf $J_7 = 4$
 C $J_7 = 2,5$



Modèle à 8 paramètres

Figure 38

Le cas du modèle en bretelle est un cas particulier du modèle précédent :



Dans ce cas particulier, l'énergie d'interface devient
 $\sigma/T = \text{Argch}(\text{ch}2(K_1^* + K_3^*)) - \text{Argch}(\text{ch}2(K_1^* - K_3^*) \text{ch}^2 2K_2 - \text{sh}^2 2K_2)$

En utilisant l'identité :

$$2 \text{Argsh}(\text{ch}2K_2 \text{sh}(K_1^* - K_3^*)) = \text{Argch}[2(\text{ch}2K_2 \text{sh}(K_1^* - K_3^*))^2 + 1]$$

On retombe sur l'expression (I) :

Une étude en fonction des 8 paramètres de ce modèle a été esquissée. Divers comportements de l'énergie d'interface en fonction de la température ont été reproduits sur les figures 37, 38. Un point intéressant, est l'existence pour des domaines restreints de l'espace des 8 paramètres, de transition multiples (au moins deux températures de transition) (*).

L'existence de transitions multiples n'est pas un fait nouveau en soi. Il est facile d'en obtenir dans des modèles décorés, où l'interaction effective entre les spins (obtenue en prenant la trace partielle (*)) Les exemples les plus simples sont obtenus en prenant un choix particulier des 8 paramètres : $K_1 = K_5$; $K_3 = K_7$; $K_2 = -K_8$; $K_4 = -K_6$.

L'expression précédente devient alors :

$$\frac{\sigma}{T} = \text{Argsh}(\text{sh}(K_1^* - K_3^*) \text{ch}(K_2 K_4)) - \text{Argch}(\text{ch}(K_1^* + K_3^*) \text{ch}(K_2 - K_4))$$

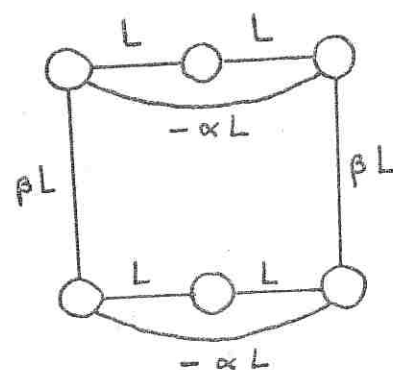


Figure 39

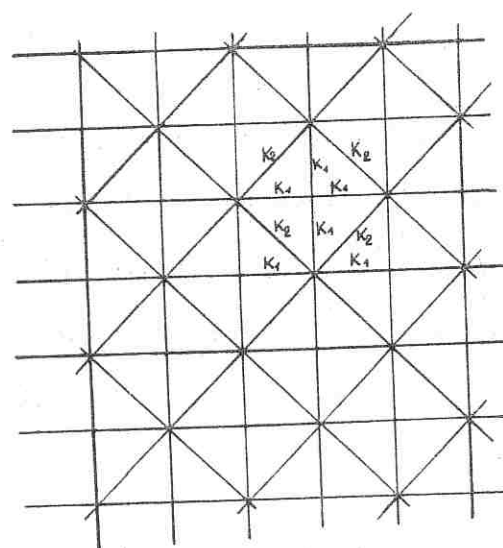


Figure 40 : Modèle complètement frustré : K est négatif.

sur le motif entre les deux spins) varie avec la température (53), mais ici ces transitions multiples sont étroitement liées à la frustration. Dans un système fortement frustré, beaucoup d'états très différents ont des énergies voisines : l'état le plus favorable en énergie correspond à l'ordre à basse température, mais son poids statistique peut être beaucoup plus faible que celui d'autres états d'énergie un peu plus élevée. Si un ordre à longue distance existe aussi dans ces autres états, on peut observer des transitions multiples.

Un exemple voisin dont l'étude a été effectuée par Vaks et al (54) est représenté par la figure 40. Ce modèle est complètement frustré ; il possède 3 températures de transition lorsque $-|K_1| < K_2 < -0,94 K$. On remarque là aussi l'étroitesse du domaine où ce phénomène se produit

Un autre exemple de transition multiple est donné par la figure 39. La transition est obtenue pour $|\alpha L + 1/2 \ln(\text{ch} 2L)| = (\beta L)^*$. L'énergie d'interface verticale pour un tel modèle est

$$\frac{G}{T} = -\alpha L + 1/2 \ln(\text{ch} 2L) - (\beta L)^* \quad \text{ou} \quad -1/2 \ln(\text{ch} 2L) + \alpha L - (\beta L)^*$$

(celle des deux valeurs qui a la plus faible valeur absolue).

Un autre exemple de calcul d'interface : considérons un modèle avec un aléatoire à la Mc Coy et l'interface perpendiculaire à la direction d'invariance par translation du modèle. Il faut calculer la plus grande valeur propre de $\pi_i (T_1 T_2)_i \neq 0$. Or ces matrices

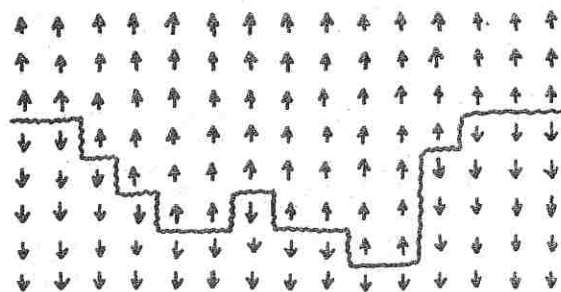
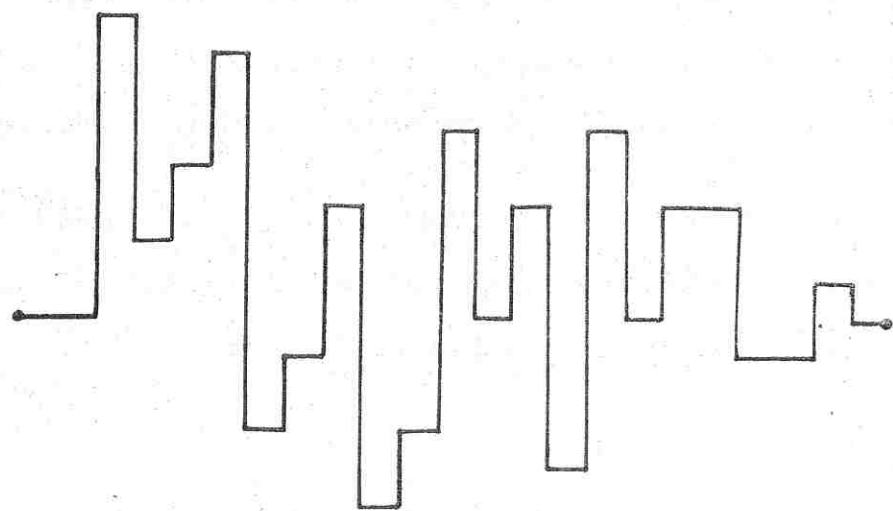


Figure 41 : L'hypothèse Müller-Hartmann.



$z_2 \mid z_1$

Figure 42

pour $q = 0$ commutent, il est alors très facile de démontrer que :

$$\sigma = \langle \gamma_0 \rangle = \langle K_1 \rangle - \langle K_2^* \rangle$$

ce qui permet de déterminer exactement le T_c pour un aléatoire (de ce type) absolument quelconque !

Venons en maintenant à une étude de l'idée de Müller Hartmann de ne retenir que les configurations du type de celles de la fig. 41 (hypothèse solid on solid). Si l'on appelle h_i les hauteurs de ces plateaux successifs, on peut se convaincre que l'hamiltonien est à basse température.

$$H_1 = 2K_2 \sum_i |h_i - h_{i+1}|$$

l'énergie est donc $N(2K_1) + \sum_{\{h\}} e^{-H}$.

Introduisons la matrice de transfert $T_{nm} = e^{-2K_2 |n-m|}$

Pour profiter du caractère cyclique de la matrice, nous effectuons une transformée de Fourier.

$$T_{qq'} = \sum_{n,m} e^{iqn} e^{-iq'm} e^{-2K_2 |n-m|} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \delta(q-q'-2\pi r) \frac{\text{sh} 2K_2}{\text{ch} 2K_2 - \cos q}$$

Le théorème de Perron-Frobenius nous confirme que le comportement critique (i.e la plus grande valeur propre) est obtenue pour $q = 0$ $= 2K_1 - 2K_2^*$. C'est un sujet d'étonnement qu'une hypothèse aussi simpliste donne la bonne expression pour l'énergie d'interface. (Th. W. Burkhardt a montré qu'elle donne le résultat exact pour un très grand nombre de modèles). Nous allons essayer de l'expliquer. Nous

montrons au chapitre IV que calculer une énergie d'interface revient à calculer une fonction de corrélation entre deux points. Si l'on considère le développement hautes températures bien connu pour le modèle d'Ising, on voit que le calcul de cette fonction de corrélation revient à faire la somme sur tous les graphes joignant ces deux points. Considérons maintenant la somme de tous les graphes SOS (J'appelle graphe SOS un graphe du type de celui de la figure.

Calculons cette somme (N est la distance entre les deux spins) : nous sommes sûrs qu'il y aura N termes Z_A (donc en facteur un terme Z_A^N). La somme sur toutes les configurations de hauteurs possibles peut être effectuée en introduisant la matrice de transfert $T_{nm} = Z_2^{|n-m|}$. N'oublions pas que nous sommes sur le dual $Z_2 = \tanh K_2^* = e^{-2K_2}$, $Z_1 = e^{-2K_1}$ le calcul est exactement le même que dans l'hypothèse de Müller-Hartmann. Ceci nous montre que cette hypothèse n'est en fait qu'une conjecture sur un problème de pure combinatoire : si l'on appelle S_N la somme des graphes allant d'un point à un autre du graphe, ces deux points étant séparés par une distance N , et si l'on appelle Σ_N la somme des graphes SOS joignant ces deux mêmes points, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \frac{S_N}{\Sigma_N} = 0$.

Le fait que l'hypothèse SOS soit vérifiée pour tous les modèles d'Ising ferromagnétique connus avec interaction entre premiers voisins, laisse à penser qu'il doit être possible lorsque S_N et Σ_N sont des séries à termes positifs de donner un encadrement $\Sigma_N < S_N < a \Sigma_N$ avec " a " croissant moins vite qu'une exponentielle (comme une puissance de N par exemple).

D'ordinaire, la présentation de cette hypothèse insiste beaucoup sur des considérations d'état de base, de "bonnes" configurations de spins, à basse température. Nous avons donné une autre formulation du problème en terme plus mathématique.

REFERENCES

- (48) B. W. Southern, Zeitschrift für Physik B, ILL preprint "Interface free energy for two dimensional Ising models".
- (49) E. Müller-Hartmann, J. Zittartz, Z. Physik B 27, 261 (1977).
- (50) T. W. Burkhardt, Z. Physik B
- (51) M.E. Fisher, A.E. Ferdinand, Phys. Rev. Lett. 19, 169 (1967).
- (52) N. Vdovitchenko, Journ. Phys. URSS 48, 526 (1965).
- (53) Domb et Green, Phase transitions and Critical Phenomena, Vol. 1
I Syozi Transformation of Ising models p. 269 329.
- (54) V.G Valks, A.L. Larkin and N. Ovchinnikov, Soviet Phys., JETP 22
820 (1965).
- (55) T.D. Schultz, D.C. Mattis and E.H. Lieb, Rev. of Modern Physics.
"Two dimensional Ising Model as a Soluble Problem of Many Fermions"
(1964).

CHAPITRE III

ETUDE NUMERIQUE DES SYSTEMES

FRUSTRES DESORDONNES BIDIMENSIONNELS

L'étude numérique est un complément indispensable des approches purement analytiques ou expérimentales et parfois même, la meilleure façon de progresser rapidement dans ces domaines des milieux désordonnés. Ce point de vue s'impose progressivement grâce aux résultats très satisfaisants obtenus sur la percolation notamment (56).

Ce chapitre veut indiquer le parti que l'on peut tirer d'études numériques, même sans moyens de calcul importants, pour débroussailler le comportement des systèmes frustrés en dimension 2, pour des spins d'Ising.

Bien que ce problème ne soit pas directement comparable aux systèmes étudiés expérimentalement, il est loin d'être trivial :

- des résultats contradictoires sont obtenus par différentes approches, comme nous l'avons noté dans le premier chapitre, et la possibilité de l'existence d'une phase verre de spin en dimension 2 ne peut pas être écartée pour le moment ;

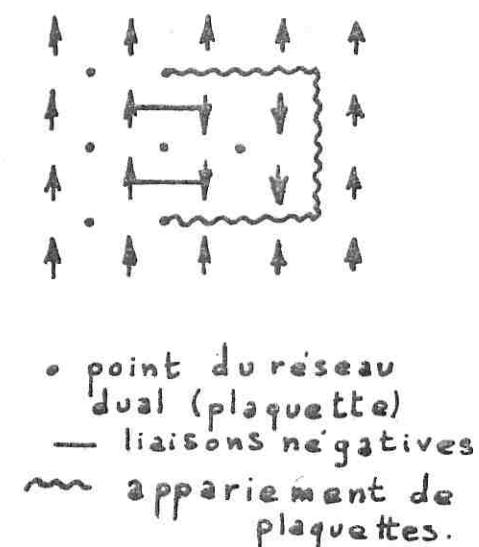


Figure 43

- la dimensionalité critique inférieure pour le verre de spin d'Ising n'est pas connue, et même s'il n'y a pas de transition de phase pour $d = 2$, le comportement des corrélations à très basse température donnerait des éléments de réponse à cette question.

Présentation

Une description très utile de la frustration est obtenue en introduisant le réseau dual. Nous avons vu en début de cette thèse que les objets fondamentaux sont les plaquettes frustrées, et nous avons expliqué les "règles du jeu" qui permettent d'obtenir les états de base à partir de ces plaquettes frustrées.

S'il n'y a pas de frustration, on peut satisfaire toutes les liaisons, et redéfinir les spins pour se ramener à un état de base ferromagnétique. Ceci correspond à un changement de Mattis (ou changement de jauge, dont nous avons également parlé). L'énergie, l'entropie sont invariantes de jauge, mais pas l'aimantation. Ceci provient du fait que ces deux grandeurs thermodynamiques découlent directement de la fonction de partition qui est invariante. Pour obtenir l'aimantation, il faut dériver F par rapport à un champ uniforme, c'est le raison pour laquelle on perd l'invariance.

Il faut chercher des quantités qui distinguent entre modèles frustrés et modèle de Mattis. C'est l'inconvénient avec la plupart des méthodes (méthode des répliques par exemple) : on ne voit pas en quoi le fait qu'un système soit frustré, ou ne corresponde qu'à un simple désordre de Mattis, intervient dans le détail des calculs.

Figure 44

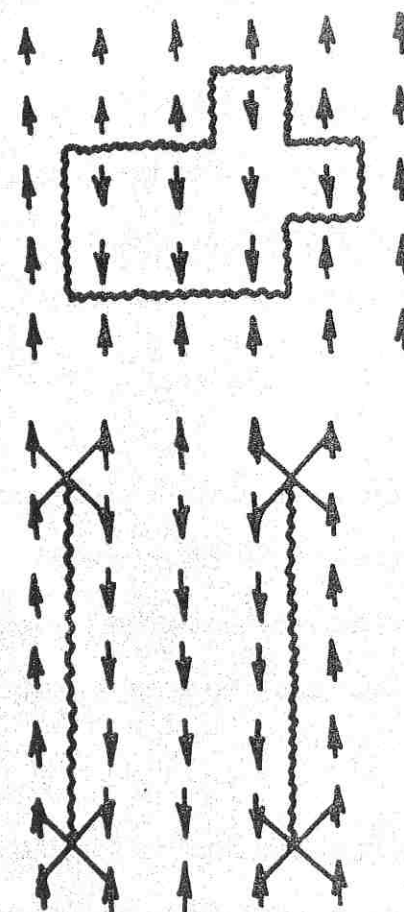
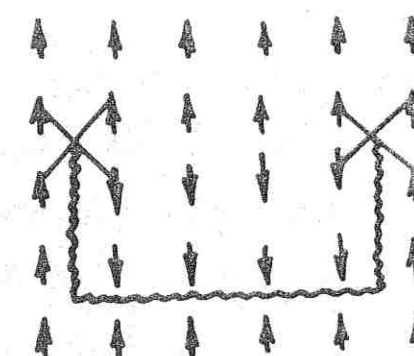


Figure 45



Etats
Excités.

Figure 46

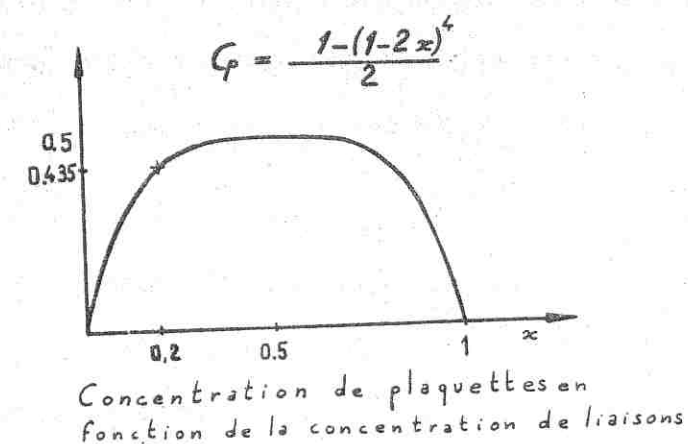


Figure 47

Dans les états excités, certains spins sont renversés par rapport à leur orientation optimale. Cela revient à créer des liaisons frustrées supplémentaires, ce qui donne sur le dual soit un contour fermé (fig. 45) soit un allongement d'une corde existante (fig. 46) soit même un réarrangement complet (fig. 47).

Dans ces problèmes, nous considérons chacune des liaisons comme des variables aléatoires indépendantes. La probabilité d'avoir une plaquette frustrée est alors (sur un réseau carré) :

$$c_p = C_4^1 x(1-x)^3 + C_4^3 x^3(1-x) = \frac{1-(1-2x)^4}{2} = \frac{1-z^4}{2} \quad \text{avec } z = 1-2x = \frac{\langle J_{ij} \rangle}{J}$$

(fig. 48)

On peut démontrer que les corrélations entre plaquettes qui n'ont pas de côté commun sont nulles, et que pour $x = 1/2$, les plaquettes sont elles-mêmes des variables aléatoires indépendantes.

Le fait de donner des valeurs discrètes pour les interactions au lieu d'une distribution continue induit des valeurs discrètes pour les niveaux d'énergie et permet par conséquent de donner un sens précis à la notion d'état de base, d'énumérer les fondamentaux, et de faire une statistique.

Propriétés de l'état de base.

Le premier problème est de déterminer x_c le seuil, la concentration critique de frustration où l'ordre ferromagnétique à longue portée disparaît, mais le plus important est de comprendre la nature de la tran-

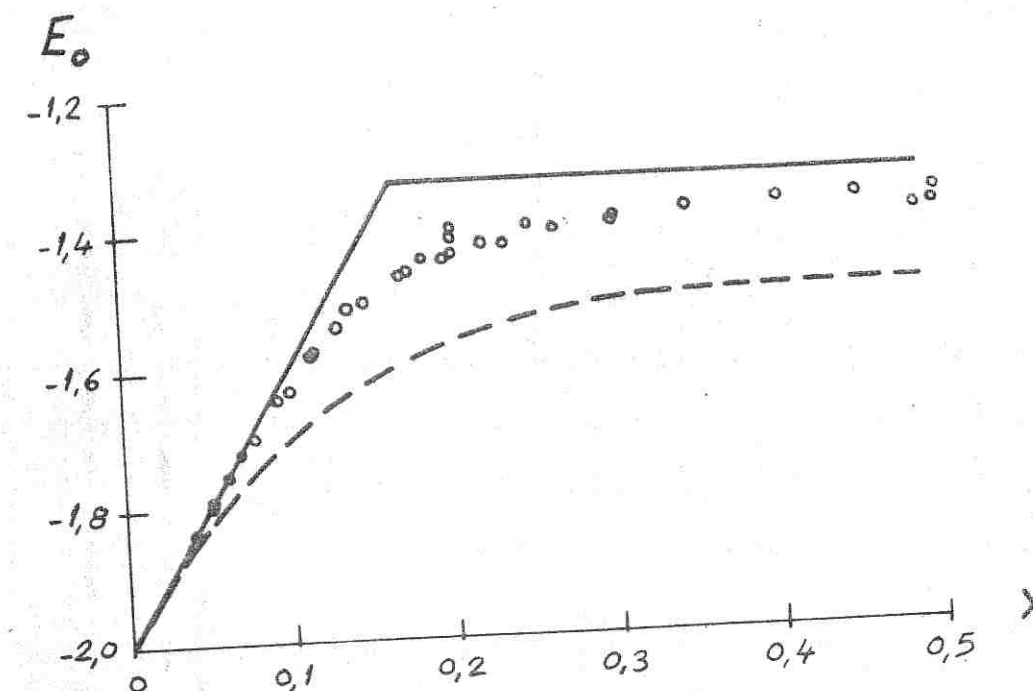


Figure 48 : Energie du fondamental en fonction de x (en pointillé et en trait plein les bornes inférieures et supérieures, en petits cercles les valeurs expérimentales).

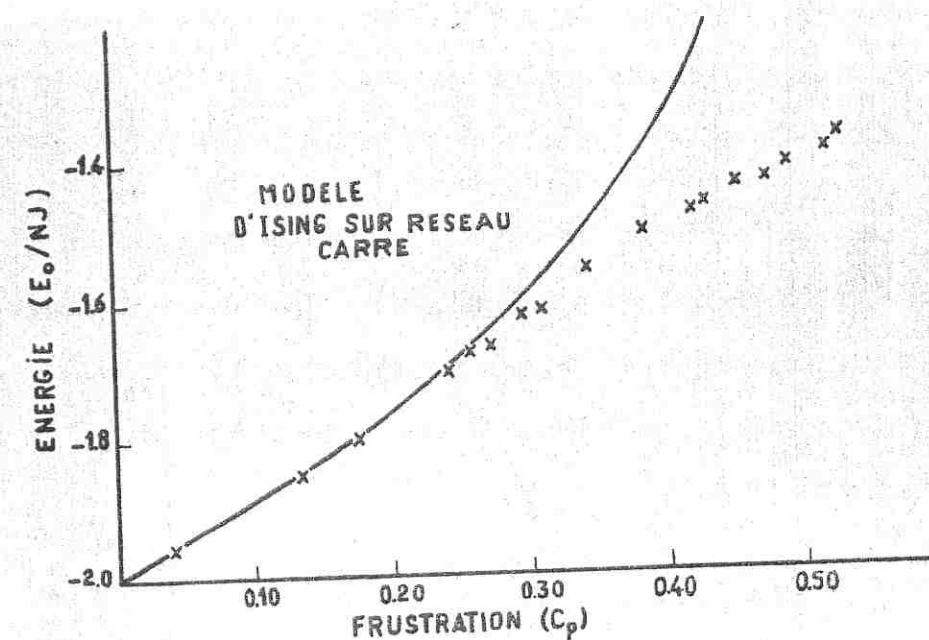


Figure 49 : Energie du fondamental en fonction de c_p (en trait plein une borne supérieure).

sition à x_c . Deux méthodes ont été utilisées pour étudier les états de base : - directement sur des échantillons 18 x 18, avec J. Vannimenus ;
- sur ordinateur, par une méthode Monte Carlo à température tendant vers zéro, par L. de Sèze, à Saclay.

Ces deux méthodes complémentaires nous ont permis d'effectuer des comparaisons utiles et d'explorer un plus grand nombre de cas.

a) Energie

Il est possible pour l'énergie de l'état de base E_0 de trouver un encadrement. Elle est inférieure à l'énergie de l'état ferromagnétique (où tous les spins pointent dans une direction) qui est $\frac{E_{\text{Ferro}}}{N} = -2J(1-2x)$ et dans tous les cas, inférieure à $-\frac{4}{3}J$ (57). Une borne inférieure est obtenue en disant qu'il y a au moins autant de liaisons frustrées que de paires de plaquettes frustrées, soit $N \cdot c_p / 2$. L'encadrement obtenu est donc :

$$-2J(1 - \frac{c_p}{2}) < \frac{E_0}{N} < \inf(\frac{E_{\text{Ferro}}}{N} - \frac{4}{3}J)$$

(voir fig. 48).

Il existe d'autres estimations (B. Derrida) (58) obtenues à partir de l'étude des rubans. On peut espérer comparer favorablement ces résultats aux résultats numériques : ainsi : $E = -1,37$ à $x = 1/2$ pour un ruban de 3 chaînes, valeur légèrement supérieure à la valeur expérimentale $E \sim -1,40$ (61).

Nous avons représenté les résultats numériques pour l'énergie en fonction de x et en fonction de c_p (fig. 48 et 49) afin de montrer

que pour $x > 0,15$, la variation de E_0 est pour l'essentiel due à la variation de la frustration moyenne. En fait, on peut montrer que l'énergie varie linéairement avec c_p pour $c_p \approx 1/2$ (Derrida et al) (59).

L'interprétation des résultats bruts est délicate : une discontinuité de la pente dE_0/dx ou dE_0/dc_p correspondrait à une transition du 1er ordre, une discontinuité dans d^2E_0/dc_p^2 à une transition du 2ème ordre. Les incertitudes dues aux fluctuations (effets de taille, métastabilité en Monte Carlo) empêchent de conclure avec certitude ; Kirkpatrick estime que l'énergie présente un accident pour $x \approx 0,16$ nous situons plutôt le changement de régime autour de $c_p \approx 0,28$ ($x \approx 0,10$), là où l'énergie s'écarte rapidement de E_{Ferro} (fig 48).

Des calculs sur des échantillons plus nombreux, utilisant des algorithmes spéciaux, seraient nécessaires pour clarifier la situation, mais l'énergie n'est sans doute pas la meilleure quantité à étudier pour localiser le seuil de frustration.

Les développements à x et c_p faibles donnent :

$$E_0 \approx E(\text{état ferro}) - 16x^3 - 16x^4 \dots$$

$$E_0 = E_{\text{ferro}} - \frac{c_p^3}{4} (1 + \frac{5}{2}c_p + \dots)$$

Nous constatons que la différence avec l'énergie de l'état ferromagnétique apparaît à l'ordre x^3 , ceci est dû aux spins qui ont trois liaisons négatives.

Champs effectifs.

Rappelons la définition du champ effectif : $H_{\text{ieff}} = \sum_j J_{ij} S_j$

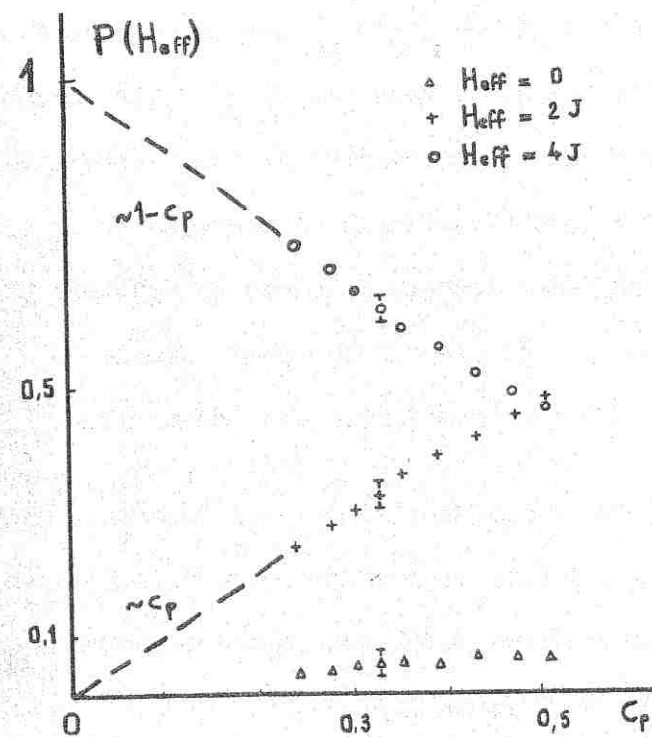


Figure 50 : Distribution des champs effectifs.

L'étude des spins en champ nul nous donne des informations sur les spins que l'on peut renverser sans que cela coûte de l'énergie. D'une façon plus générale, le sens physique du champ effectif est l'énergie nécessaire pour renverser un spin, son étude nous donne donc des renseignements sur les excitations à un spin.

A la différence de l'énergie totale, $P(H_{\text{eff}})$, la distribution des champs effectifs, dépend de l'état de base particulier choisi, mais les fluctuations ne sont pas trop importantes et on peut obtenir des moyennes (sur les différents états de base) significatives (fig. 50).

Il y a peu de spins en champ nul (spins "fous") : environ 6 % pour $x = 1/2$; la minimisation de l'énergie réduit cette probabilité pour un spin d'être en champ nul. $P(H_{\text{eff}} = 0)$ tend vers zéro pour des interactions à longue portée, mais est également non nul pour des interactions gaussiennes entre plus proches voisins.

Il est possible de donner des développements de la distribution de champs effectifs à concentrations faibles :

$$P(H_{\text{eff}} = 0) \sim 6x^2 \sim 3/8 c_p^2$$

$$P(H_{\text{eff}} = 2J) \sim 4x - 12x^2 \sim c_p$$

$$P(H_{\text{eff}} = 4J) \sim 1 - 4x + 6x^2 \sim 1 - c_p - 3/8 c_p^2$$

Les distributions varient régulièrement avec c_p et le fait le plus marquant est que $P(0)$ sature à une valeur d'environ 6 % pour $x > 0,15$. L'interprétation est la suivante : en dépit de la frustration grandissante, des réarrangements qui abaissent l'énergie se produisent qui maintiennent

les spins "fous" à une faible concentration. La valeur citée par Kirkpatrick ($P(0) \approx 0.08$ à $x = 0.5$) est un peu plus forte, ce qui s'explique par une meilleure optimisation des états de base dans notre méthode. (57).

Entropie

L'existence d'une entropie résiduelle est liée au choix d'interactions $\pm J$. Néanmoins, cette entropie donne une idée de la densité des états de très faible énergie dans un modèle gaussien.

A x faible, on peut effectuer un développement de l'entropie (60) :

$$S(x) = S(x) - S(0) = \frac{\ln(W/2)}{N}$$

$$\approx 6x^2 \ln 2 + (54 \ln 3 - 84 \ln 2) x^3 + \dots$$

Une partie de $S(x, T=0)$ (entropie résiduelle) est due aux spins fous (pour $x = 1/2$, cette contribution est environ $0,06 \ln 2$). Le reste provient des configurations plus compliquées. Expérimentalement, on observe que déjà pour $x \sim 0,09$ on a à considérer de grands groupes de spins, de la taille du système lui-même, pour obtenir S . On peut effectuer la comparaison avec les expériences de "calorimétrie Monte Carlo" :

Monte Carlo $S_{MC} \sim 0,10 K_B$

Etude directe $S \sim 0,07 K_B$ ($x = 0.5$).

Une partie de cette différence est due au plus petit nombre de spins fous dans nos états de base. L'influence des effets de taille n'a pas été étudiée de façon détaillée.

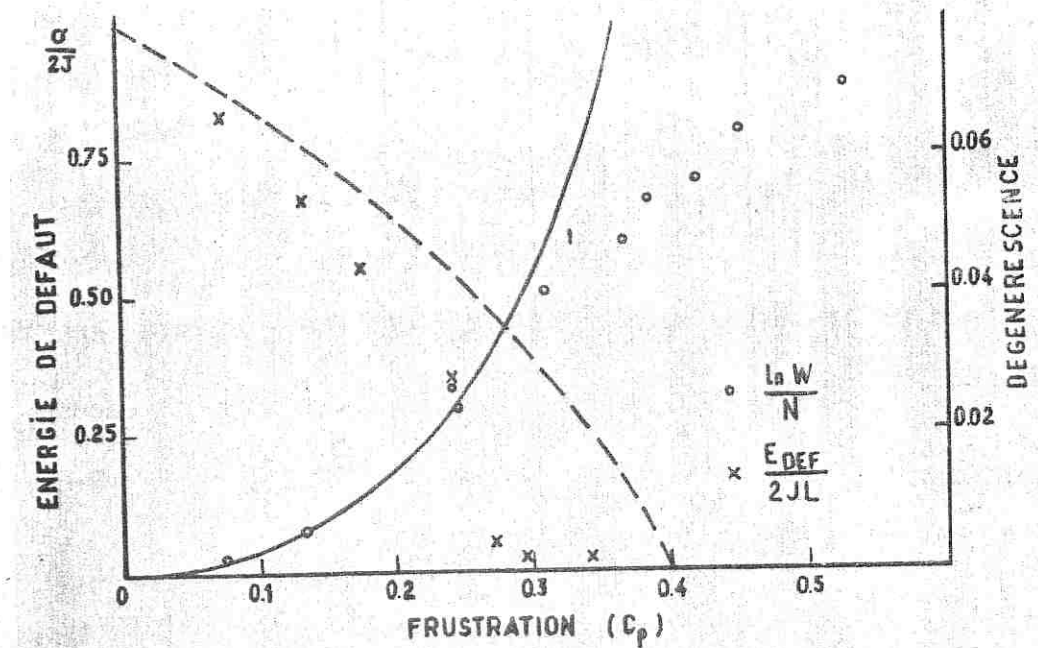


Figure 51 : Energie de défaut et dégénérescence, en fonction de C_p .

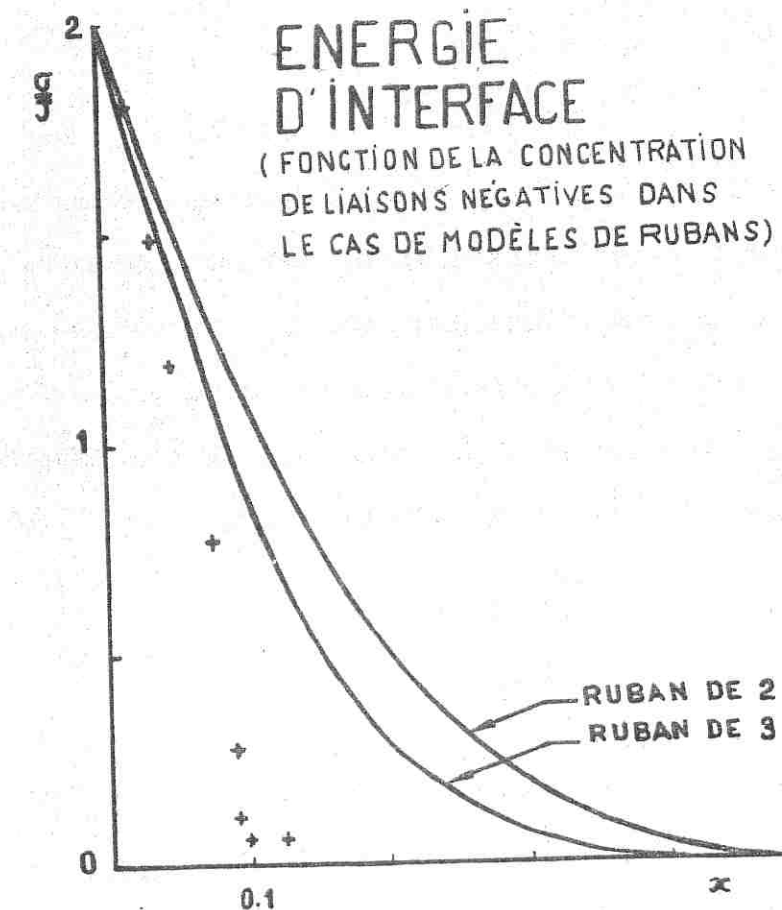


Figure 56 : Energie d'interface obtenu sur nos échantillons représentés par des croix. En trait plein, ont été représentées pour comparaison les énergies d'interface pour deux rubans (courbes obtenues par B. Derrida).

Par analogie avec le problème de la percolation, on peut s'attendre à ce que l'entropie présente une singularité au voisinage de x_c . On observe bien un changement de comportement pour $x \sim 0.1$ mais l'énumération des états de base est fastidieuse et il n'a pas été possible de mener une étude systématique.

A cause des difficultés précédentes pour déterminer x_c , nous nous sommes tournés vers l'étude de l'énergie d'interface ⁽⁶¹⁾. L'idée de départ est qu'un état ordonné devrait être sensible aux conditions aux limites (cf. : localisation ⁽⁶²⁾).

Dans le modèle d'Ising pur, l'énergie d'interface s'annule à T_c , et il est naturel d'étudier son comportement quand on introduit de la frustration dans le modèle.

Nous partons d'un état de base, renversons les spins de la moitié droite, par exemple, et laissons les spins relaxer, en maintenant les spins de la paroi droite fixés.

Energie d'interface, énergie de défaut

Nous définissons ainsi :

$$E_{\text{Def}} = E_{\text{final}} - E_0$$

L'énergie de défaut décroît très vite pour x faible et s'annule (sur un réseau 18×18) pour $x_c \sim 0,10$ (voir fig. 51) (en pratique cela signifie qu'elle devient de l'ordre de grandeur des fluctuations). Dans les études Monte Carlo, l'annulation est obtenue (par extrapolation) à $x_c \sim 0,15$ pour des échantillons 80×80 , la pente de E_{Def} s'annulant à x_c .

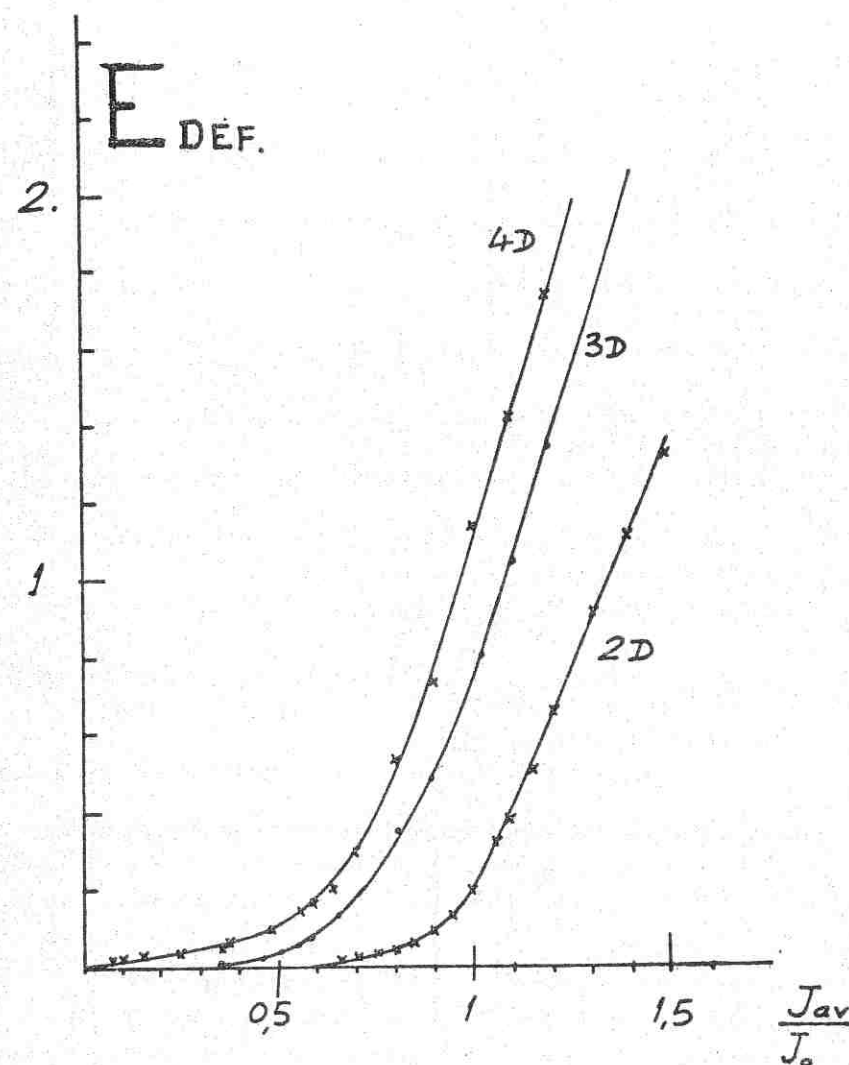


Figure 57 : Energie de défaut pour divers dimensions, pour des modèles gaussiens.

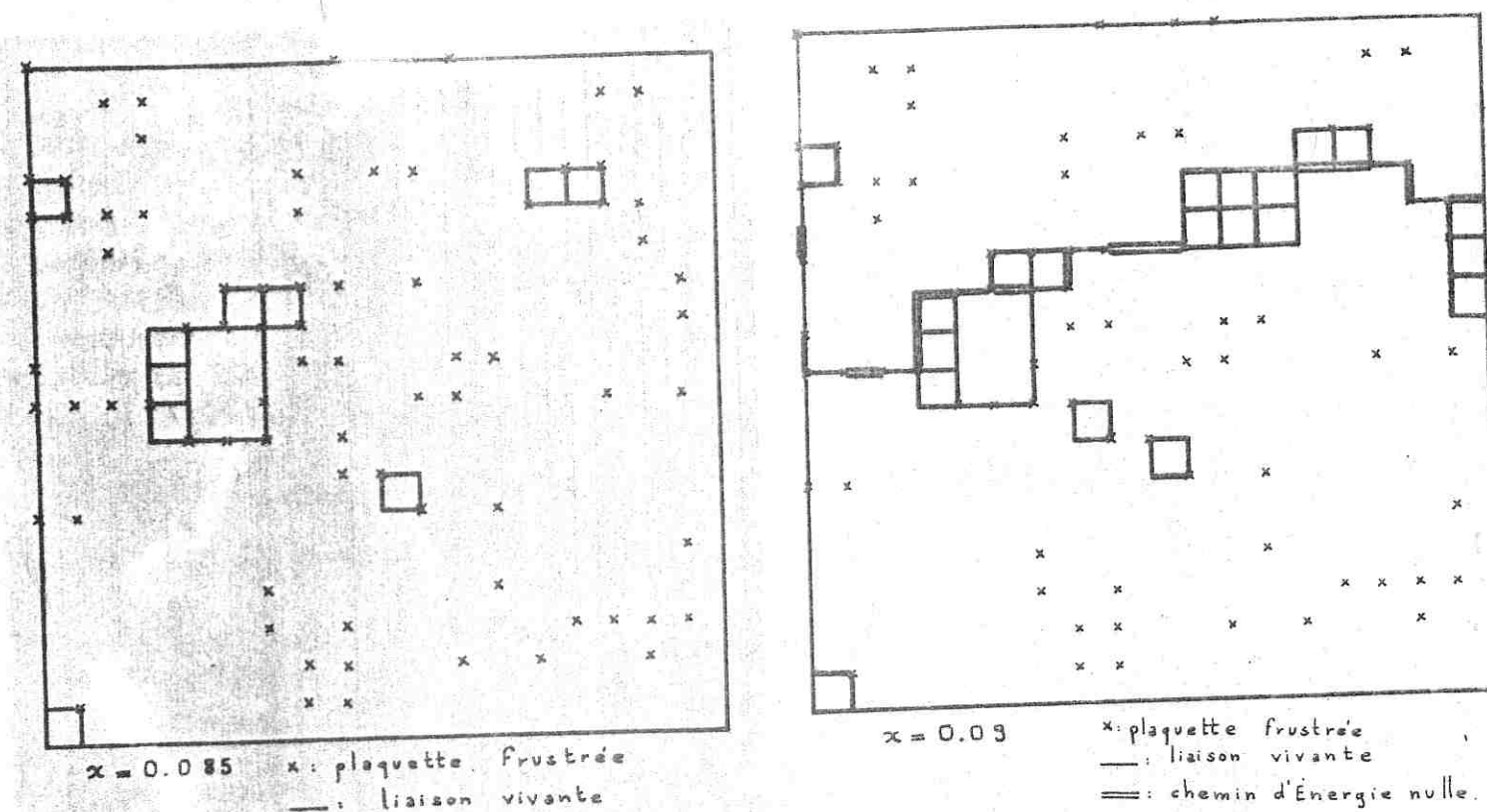


Figure 52 : Exemple d'échantillon étudié : ici $x = 0,085$

Figure 53 : Autre exemple $x = 0,09$: on peut créer un défaut sans que cela coûte de l'énergie.

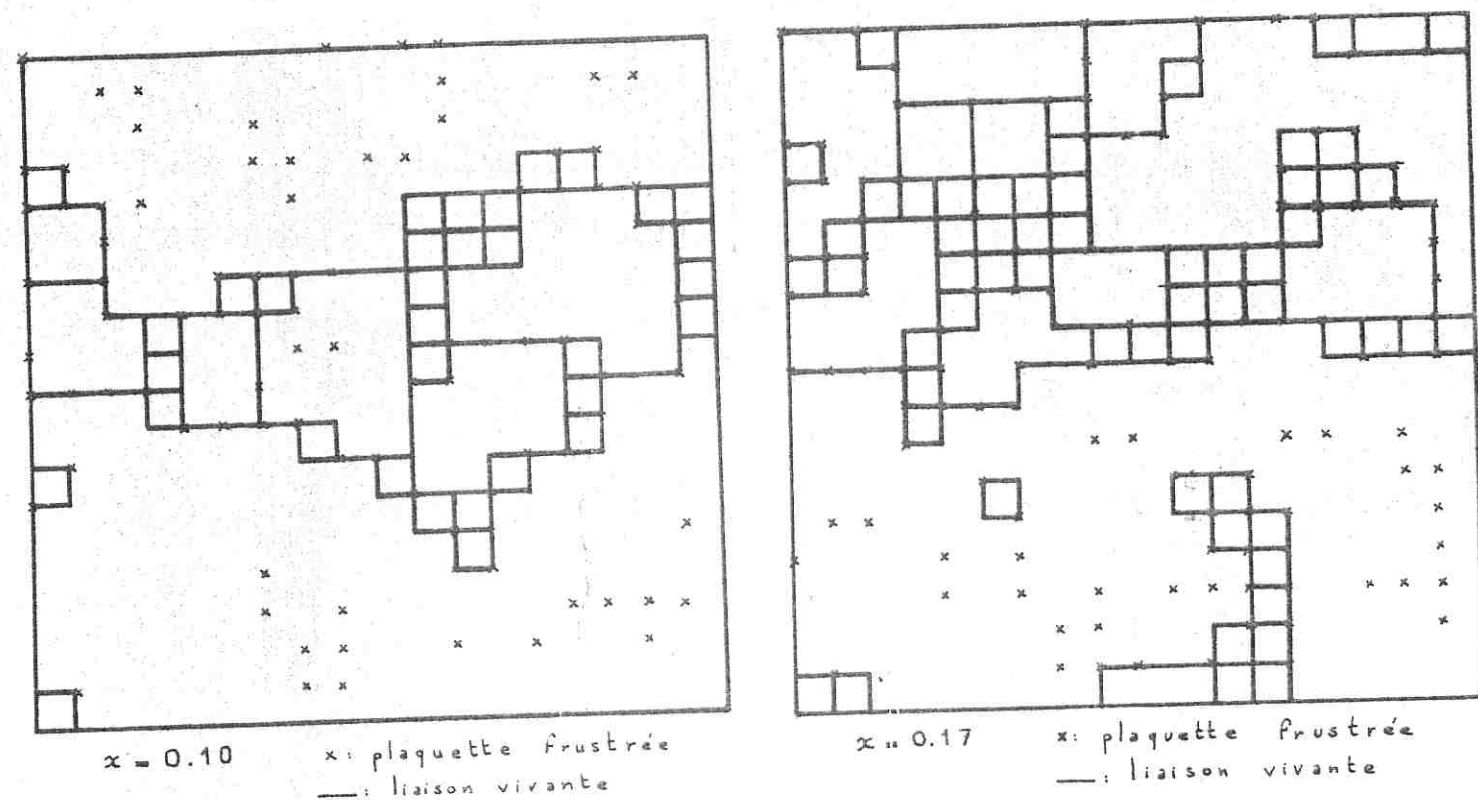


Figure 54 : $x = 0,10$

Figure 55 : $x = 0,17$

Le problème ici réside dans le fait que si cette énergie de défaut s'annule comme $(x_c - x)^a$ avec $a > 1$, il est difficile numériquement, de séparer ce comportement d'effets de taille ou d'effets de métastabilité. La détermination précise de x_c reste donc ouverte. Notons que différentes prédictions ont été faites, par une méthode de décimation ($x_c \sim 0,08$, Young et Southern) ⁽⁶³⁾ et par une analyse de séries en variable de frustration ($x_c \sim 0,10$, Grinstein et al) ⁽⁶⁴⁾. Pour $x_c < x < 1 - x_c$ (sur le réseau carré), l'énergie de défaut est nulle à $T = 0$. Cela entraîne-t-il que le système est dans une phase paramagnétique ou peut-il exister quand même une phase verre de spin pour ces concentrations ? Cette question est délicate, et nous allons essayer d'exposer les divers points de vue.

Reed et al ⁽⁶⁵⁾ (fig. 57) ont étudié l'énergie de défaut en dimension 2, 3 et 4 sur un modèle gaussien ; ils concluent que pour $d = 4$ $E_{\text{Def}} \rightarrow 0$ seulement pour des distributions symétriques d'interactions, tandis que pour $d = 2$ ou 3, on l'observe pour des distributions asymétriques. Selon eux, il n'existe pas de phase verre de spin en dimension deux ou trois.

Leur argument est le suivant : en présence de frustrations, le système contient des grands paquets de spins susceptibles de se renverser sans modification de l'énergie. Ces paquets sont délimités par des contours d'énergie nulle, qui sont l'équivalent des interfaces dans les systèmes purs ⁽⁺⁾. Le paramètre d'ordre d'Edwards-Anderson par conséquent, s'annule à température nulle. Cet argument a été critiqué par Binder et Stauffer ⁽⁶⁶⁾ (calculs Monte Carlo).

(+) Considérons deux spins éloignés : si un contour d'énergie nulle passe entre eux, pour chaque état où ils pointent dans la même direction, il existe un état où ces spins pointent dans des directions opposées.

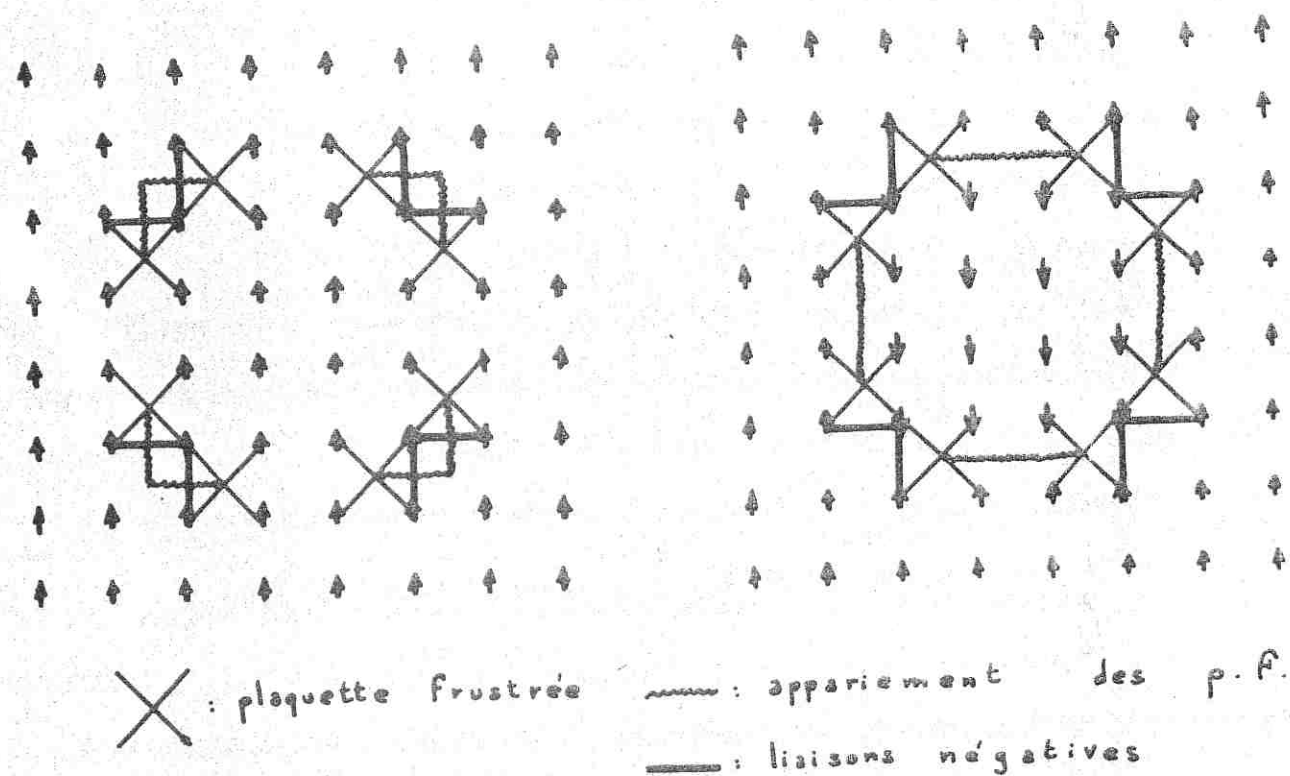


Figure 58 : Entropie associée aux contours d'énergie nulle.

Nous avons montré à propos des modèles périodiques frustrés que l'annulation de l'énergie d'interface n'est pas suffisante pour empêcher une transition de phase. La même objection peut être présentée pour les modèles désordonnés frustrés. Nous avons indiqué qu'il était également nécessaire de s'intéresser à l'entropie associée aux contours d'énergie nulle. Précisons cette idée : si l'on regarde la figure 58, on voit que les états où les spins sont pointés vers le haut à l'intérieur du domaine encadré par le contour d'énergie nulle sont beaucoup plus nombreux que les états où les spins sont pointés vers le bas (un seul sur cet exemple). Donc pour chaque état du type I, on peut associer un état du type II mais la correspondance n'est pas biunivoque. Le désordre n'est pas aussi complet que le suggèrent A.J. Bray, M.A. Moore et P. Reed⁽⁶⁷⁾ il y a plus de rigidité.

Pour clarifier la situation, il est nécessaire d'étudier de façon plus détaillée les corrélations dans les états de base et les états faiblement excités.

Corrélations

La distribution des champs effectifs donnait seulement des informations locales sur les spins et il faut étudier d'autres propriétés pour apprendre quelque chose au sujet des corrélations entre spins.

Quelle est la structure des états de base ? On peut formuler la question différemment en s'interrogeant sur le nombre de spins (et leur structure) qui basculent entre deux états de base. Deux solutions se présentent a priori : soit des petits groupes de spins, soit de larges amas

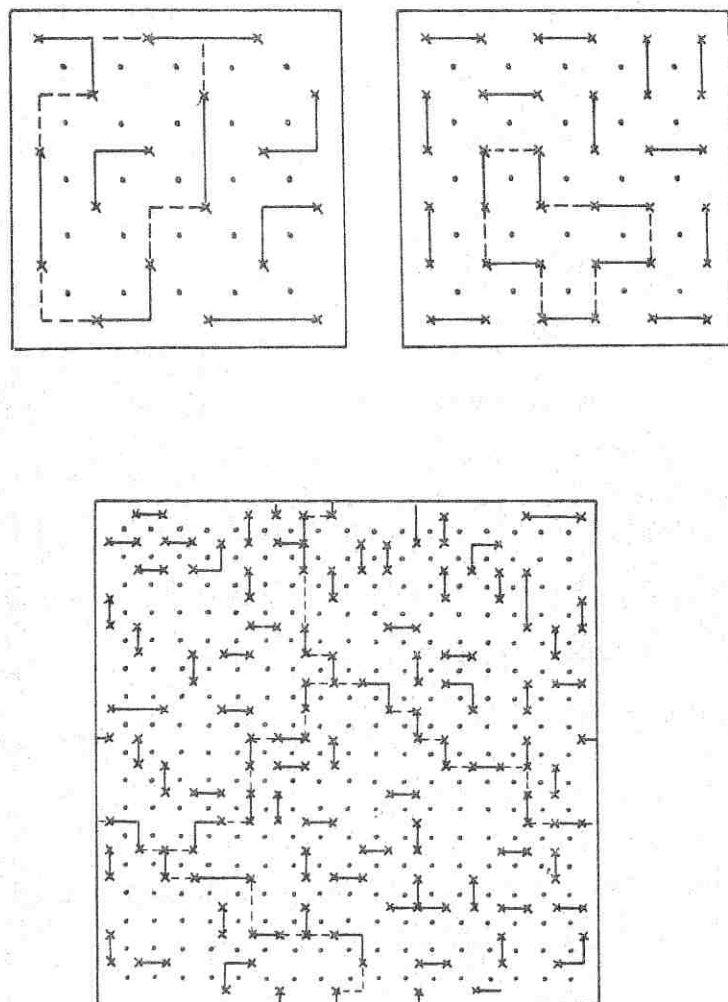
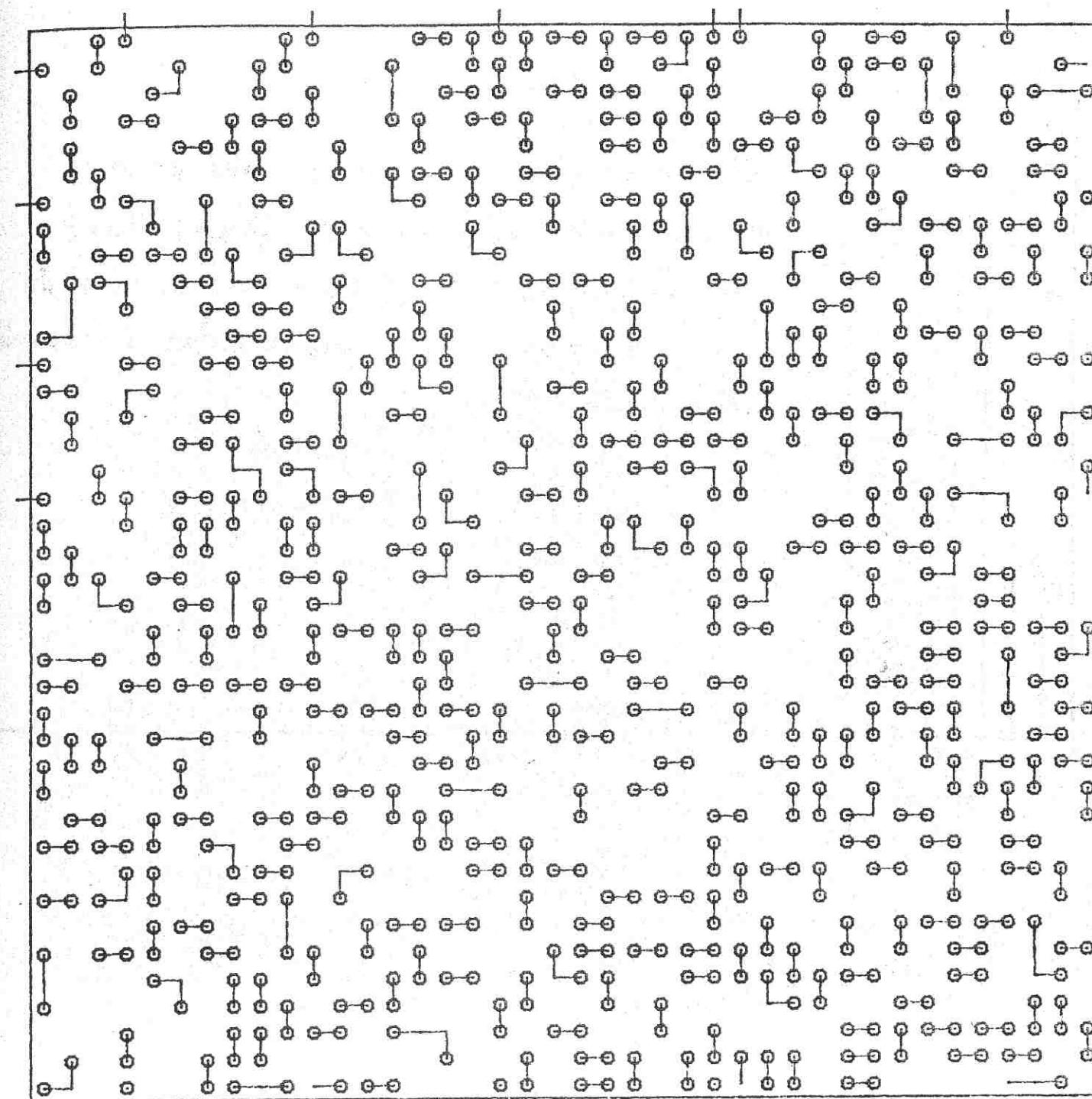


Figure 59 : Echantillon 18 x 18.

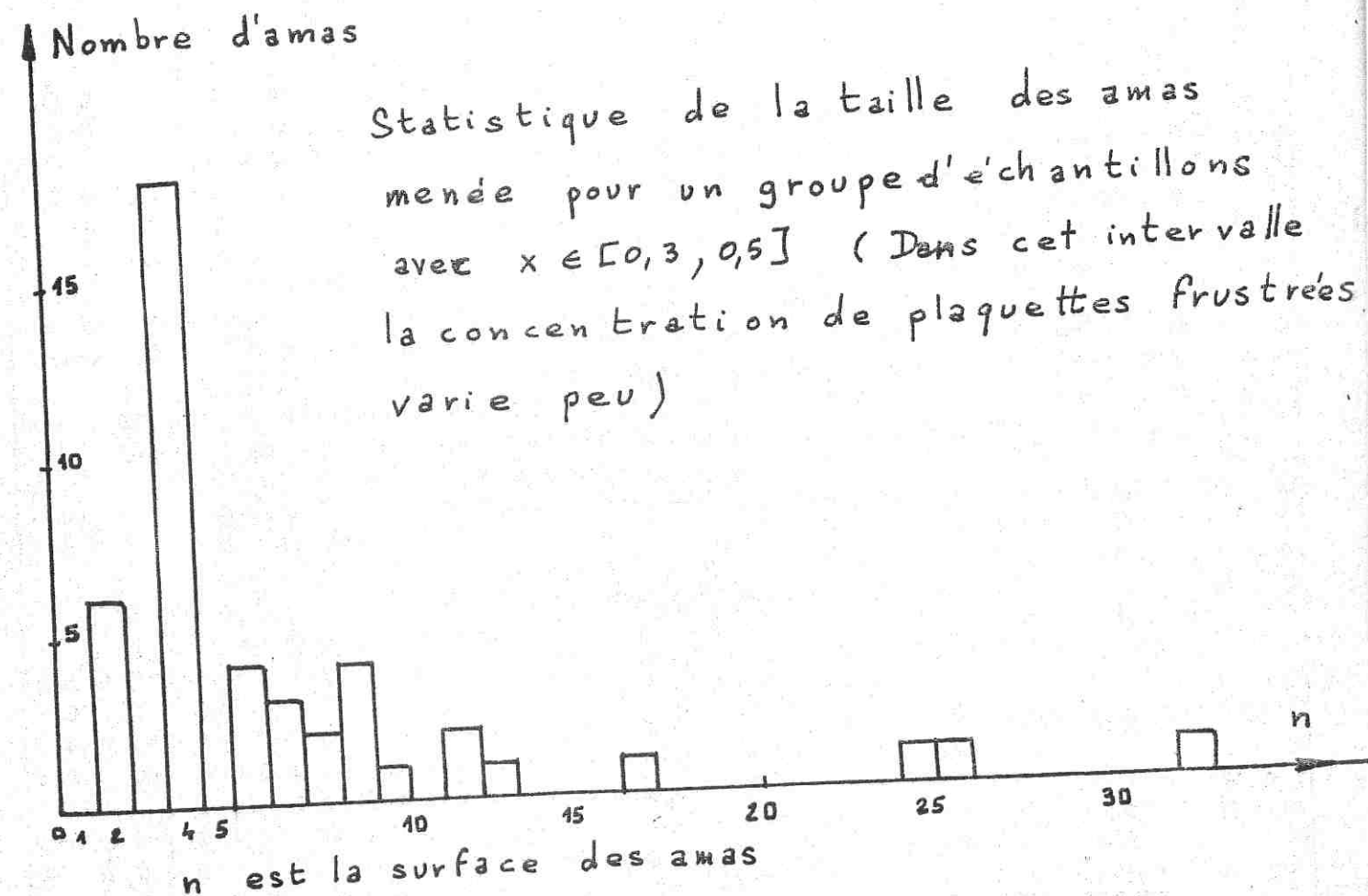


Reseau 40x40 - 50% de liaisons AF

Carte des plaquettes frustrees

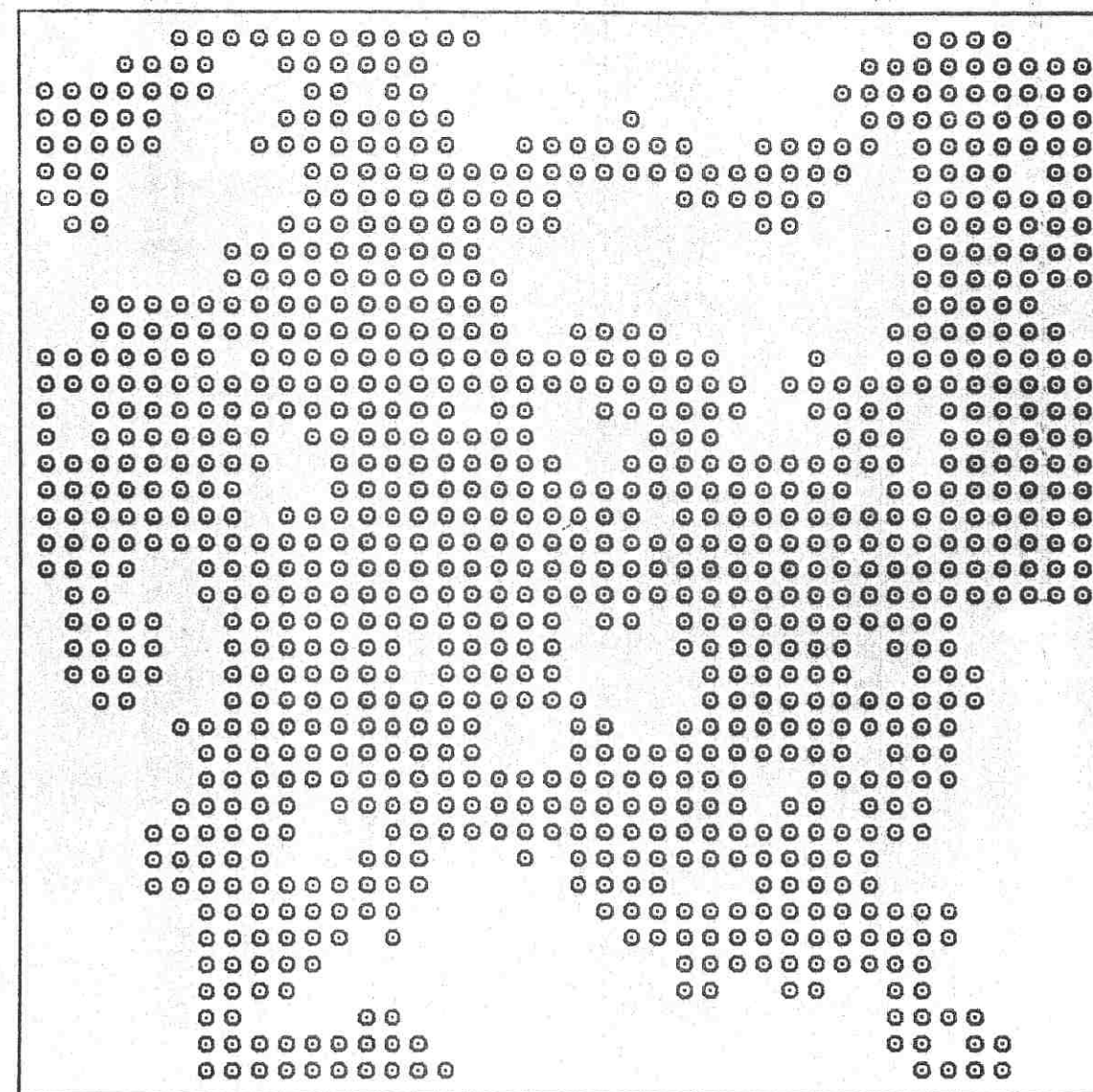
Etat de plus basse energie obtenu : -2244

Figure 60 : Echantillon 40 x 40



Il y a beaucoup d'amas très grands, beaucoup de petits amas et un nombre réduit d'amas de taille intermédiaire ; il semble important d'avoir en tête cette distinction entre petits et grands amas.

Figure 61 : Stat. de la taille des amas.



Echantillon 40 x 40 (Simulation numérique de L. De Sèze).

Dans les systèmes frustrés existent des contours d'énergie nulle qui sont les frontières des domaines de spins qui basculent d'un état de base à l'autre. Nous appelons liaisons vivantes, les liaisons qui appartiennent à de tels contours. (Parce qu'elles changent d'état : si elles sont frustrées dans un état de base, elles ne le sont plus dans l'autre et réciproquement).

Ces liaisons constituent les contours de paquets de spins qui sont solidaires les uns des autres (+).

L'étude en fonction de la frustration montre un changement de comportement pour $c_p \sim 0,3$: en dessous de cette valeur, les fluctuations sont faibles, il existe un amas regroupant la plupart des spins, c'est la continuation de la phase ferromagnétique. Au dessus de $c_p \sim 0,3$, les fluctuations d'un échantillon à l'autre deviennent beaucoup plus importantes. On continue néanmoins à observer un paquet de grande taille, et même pour $x=1/2$, il contient en moyenne plus de la moitié des spins. Pour avoir une idée des effets de taille, nous avons également étudié un échantillon 40×40 (fig.60) en collaboration avec L. de Sèze. L'existence d'un grand amas dans cet échantillon laisse supposer que cet effet est général. Même s'il n'existe pas d'amas infini, l'état de base est beaucoup plus rigide que l'on pouvait le supposer a priori.

(+) A température nulle, la corrélation entre spins appartenant au même paquet est totale. Bien entendu, les spins appartenant à différents paquets peuvent être partiellement corrélés (par des effets d'entropie, comme nous l'avons signalé au paragraphe précédent (fig.58)), mais l'étude de ces paquets donne déjà des informations précieuses sur l'importance des corrélations. Une statistique sur leur taille a été menée (fig.61).

Figure 62 : Statistique sur les paquets : liaisons vivantes en fonction des spins solidaires.

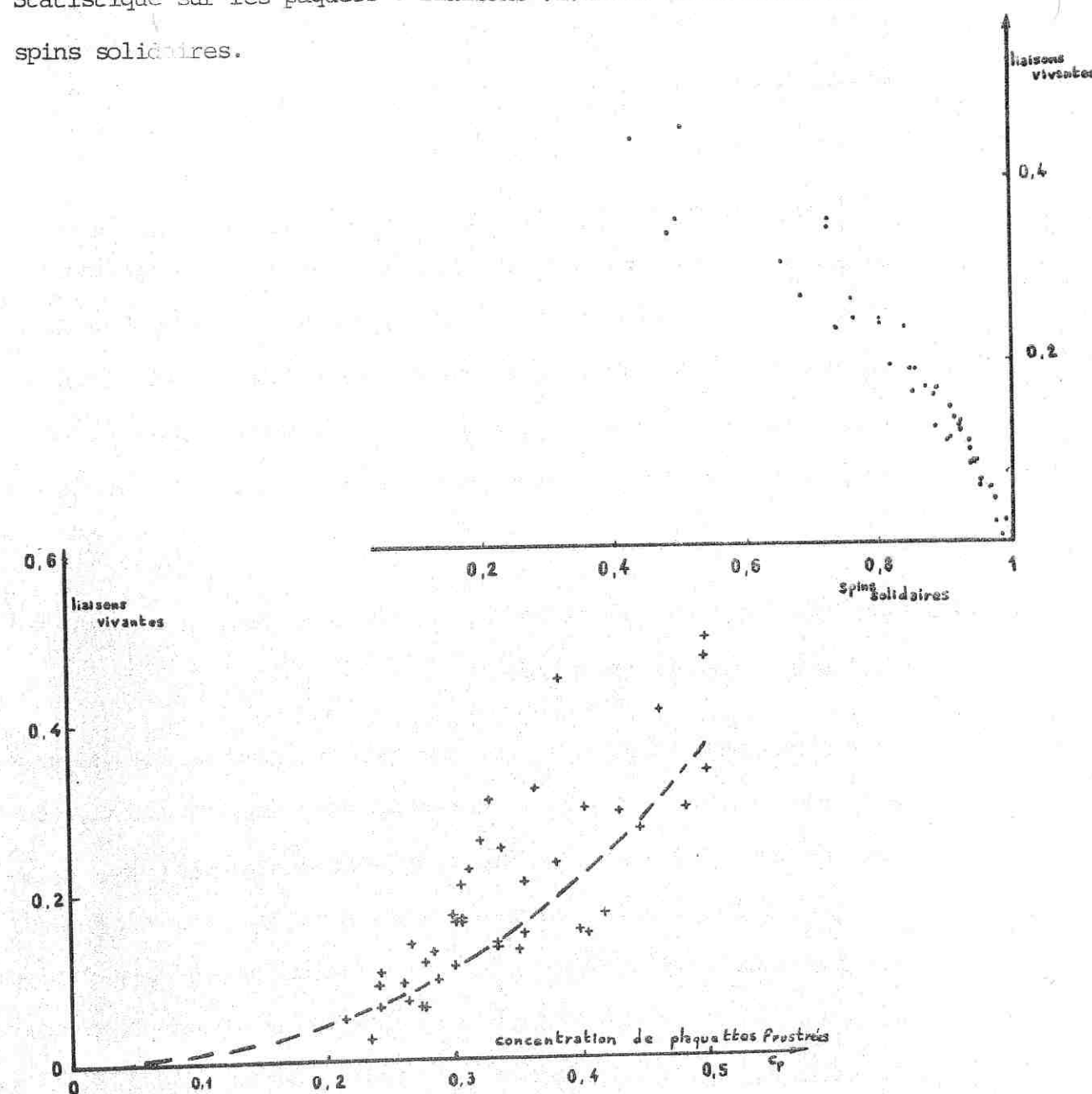


Figure 63 : Liaisons vivantes en fonction de la concentration de plaquettes frustrées.

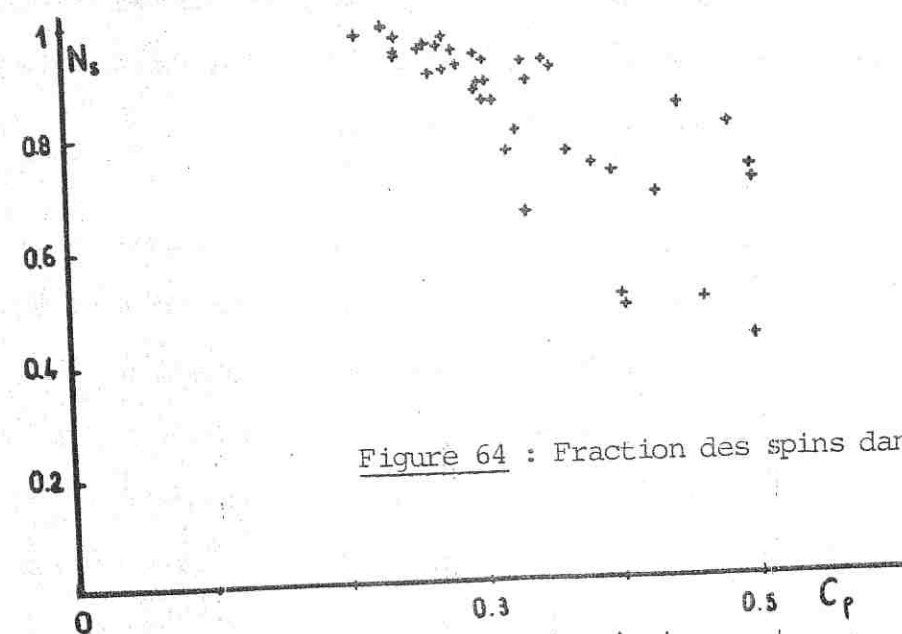


Figure 64 : Fraction des spins dans le plus grand amas.

Fraction des spins dans le plus grand amas.

Nous avons cherché en portant dans une figure (fig.62) le nombre de liaisons vivantes L_v en fonction du nombre de spins solidaires N_s à caractériser le type de paquet que l'on rencontrait. A l'intérieur d'un paquet, les spins sont effectivement solidaires : le nombre de spins solidaires est proportionnel à la surface du paquet ; par contre, le nombre de liaisons vivantes associé au paquet est proportionnel au périmètre. L'étude périmètre en fonction de la surface permet d'avoir une idée sur le type de paquet : l'expérience montre que ces grands paquets sont plus ramifiés pour les fortes concentrations ($\frac{L_v}{N_s}$ grand) par opposition à des structures plus compactes aux faibles concentrations.

Pour conclure ce chapitre, nous allons essayer de préciser le caractère de la phase au delà du seuil de frustration.

L'image qui vient d'abord à l'esprit est celle d'un milieu possédant de nombreux contours d'énergie nulle s'enchevêtrant et délimitant de petits domaines pratiquement indépendants. Un tel système se rapprocherait beaucoup d'un paramagnétique.

Ce que nous observons tout d'abord, c'est qu'en fait le système arrive assez bien à minimiser son énergie : la fraction de spin est champ nul est faible. Les contours d'énergie nulle existent, mais ceux de grandes dimensions sont peu nombreux. De grand paquets existent (regroupant plusieurs centaines de spins dans nos échantillons). Ces paquets sont de plus corrélés par des effets d'entropie analogues à ceux que nous avons mis en évidence sur les modèles périodiques.

Au total, l'image qui commence à se dégager est celle d'un système

plus rigide que dans l'image naïve donnée au départ. Ceci est en bon accord avec les simulations Monte Carlo qui montrent que le comportement du système n'est pas paramagnétique. Mais il est encore trop tôt pour savoir s'il s'agit d'une phase verre de spin distincte.

REFERENCES

- (56) S. Kirkpatrick, Les Houches (1978).
- (57) S. Kirkpatrick, Phys. Rev. B 16 4630 (1977).
- (58) B. Derrida, Communication privée.
- (59) B. Derrida, J. Vannimenus, Y. Pomeau, J. of Phys. C
- (60) M. Gabay, T. Garel, Solid State Physics, Cluster expansion approach of frustration on a two dimensional lattice.
- (61) J. Vannimenus, G. Toulouse, J. Phys. C. 10 L 537 (1977).
- (62) Thouless, Les Houches (1978).
- (63) B.W. Southern, A.P. Young, J. Phys. C. 10 2179-95 (1975).
- (64) G. Grinstein, C. Jayaprakash et M. Vortis, Nordita preprint.
- (65) P. Reed, M.A. Moore, A.J. Bray, J. Phys. C 11, 139 (1978).
- (66) Binder, Stauffer, Z. Physik B, preprint.
- (67) A.J. Bray, M.A. Moore, P. Reed, J. Phys. C 11 1187 (1978).

* "Frustrated Ising Magnets : 0 Temp. properties from series expansions".

CHAPITRE IV

AUTRES DIRECTIONS D'APPROCHE

DUALITE DANS LES MILIEUX DESORDONNES

Dans ce chapitre, nous nous plaçons en dimension 2.

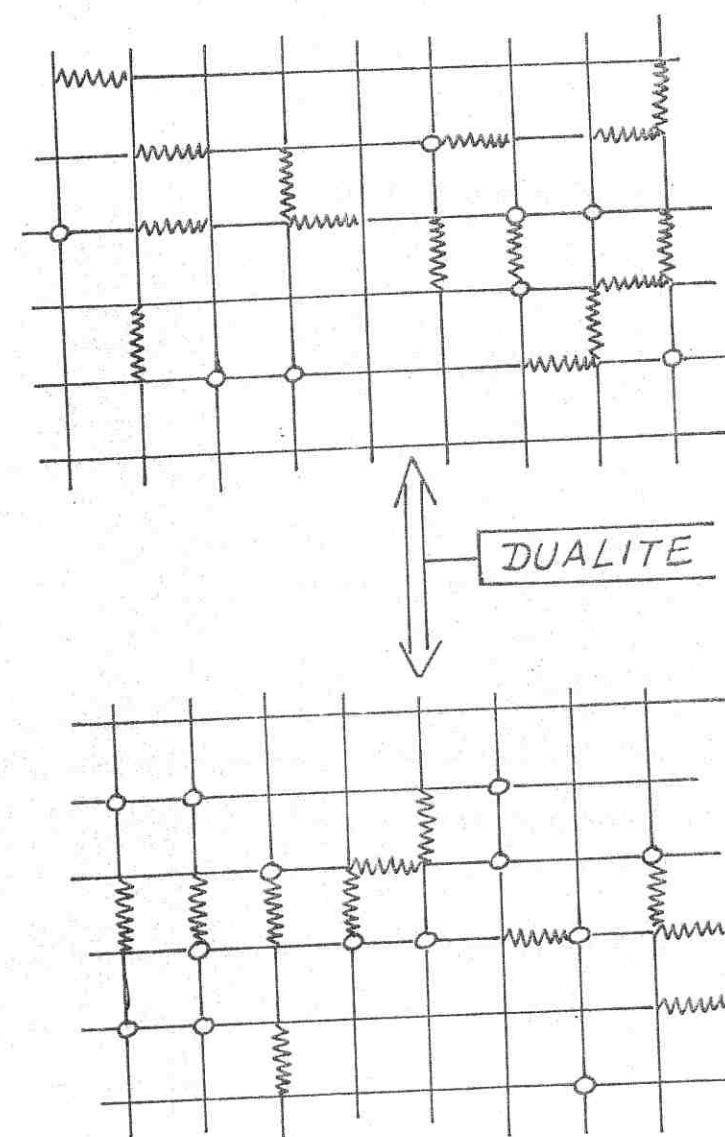
1) Dualité sur les modèles d'Ising

Que la dualité puisse s'appliquer avec des distributions quelconques (non invariantes par translation) est un résultat

Le résultat dans le cas d'un modèle d'Ising avec interactions (entre plus proches voisins) positives est simple : il relie la fonction de partition d'un premier modèle sur graphe G avec des interactions K_{ij} à la fonction de partition du modèle correspondant au graphe dual G^* du graphe G et avec une interaction (pour la liaison $\langle \alpha\beta \rangle$ duale de la liaison $\langle ij \rangle$) $K_{\alpha\beta}^* = -1/2 \ln (\text{th} K_{ij})$. Lorsqu'il y a des liaisons négatives le résultat reste formellement le même mais ici :

$$K_{\alpha\beta}^* = -1/2 \ln (\text{th} K_{ij}) - \frac{i\pi}{2}.$$

Comme $e^{\frac{i\pi}{2} S_\alpha S_\beta} = i S_\alpha S_\beta = S_\alpha S_\beta \cdot i$, on voit qu'on obtient une égalité (à des facteurs multiplicatifs connus près) entre une fonction de partition



~~~~~ liaison  
négative  
o point d'une  
fonction  
de Green

~~~~~ liaison  
négative
o point d'une
fonction
de Green.

Figure 65

Dualité dans les milieux désordonnés

de Green à n points associée par dualité et $G(n+2)$ la fonction de Green avec les n points précédents et les deux points supplémentaires aux frontières du réseau décrits ci-dessus. Supposons que la densité de plaquettes frustrées soit faible ; créer un interface, c'est-à-dire rajouter deux plaquettes frustrées très éloignées l'une de l'autre coûtera beaucoup d'énergie. (fig. 67), et en général, lier ces deux nouvelles plaquettes restera une solution proche de la solution la plus économique (énergétiquement parlant). On conçoit qu'à partir d'une certaine concentration critique, toute plaquette (et en particulier, les deux nouvelles) est toujours dans le voisinage d'une autre plaquette et il est alors possible de redéfinir de nouveaux couples de plaquettes liées entre elles, la somme des longueurs de corde étant sensiblement égale à celle sous les deux plaquettes supplémentaires (fig. 68). Ainsi l'énergie d'interface est-elle nulle.

Un autre exemple consiste en l'étude d'un modèle d'Ising où l'on a deux valeurs des interactions d'échange K_1 et K_2 qui sont équiprobables. Si $K_1 > K_2$, on aura $K_1 < K_2$ par dualité, la répartition restant équiprobable.

On voit qu'à la limite thermodynamique, on se renvoie sur la même distribution sous réserve que $K_1^* = K_2$. La température de transition si elle existe sera donc la même que dans le problème d'Onsager et déterminée par $\text{sh}2K_1 \cdot \text{sh}2K_2 = 1$.

De surcroît, nous pouvons mentionner que des données de type Monte Carlo (79) pour un modèle d'Ising aléatoire en dimension deux présentent des signes, des indications que la symétrie entre hautes et basses températures qui est explicite dans la relation de dualité puisse être une propriété possédée par une large classe de modèles

d'Ising aléatoires en dimension deux, plutôt que restreinte aux répartitions équiprobables.

2) Extension à d'autres modèles

Ces quelques considérations concernaient la dualité usuelle. En fait, la dualité est un instrument autrement plus puissant, si on la généralise quelque peu. Il a été démontré récemment un théorème très profond de dualité algébrique (Biggs NL On the duality of interaction models Math Proc Cambridge Philos. Soc. 80 (1976) 429-36). Calculer une fonction de partition du type usuel revient à calculer :

$$Z = \sum_{\{\omega\}} \prod_e i(\delta\omega(e))$$

(e désigne une liaison du graphe, ω une application définie sur les vertex du graphe, $\delta\omega(e)$ la différence de la valeur prise par ω aux deux vertex qui constituent les extrémités de la liaison (cobord), i une application quelconque).

Par exemple, dans le cas d'Ising :

$$Z = \sum_{\{s\}} \prod_{\langle ij \rangle} \exp[J_{ij}(s_i - s_j)^2].$$

On peut réécrire Z comme étant $\sum_{\{\phi\}} \prod_e i(\phi(e))$ où ϕ est une

application définie sur les liaisons. La sommation est faite sur toutes les configurations ϕ qui sont des cobords d'une application ω .

Introduisons maintenant

$$Y = \sum_{\{\phi\}, \partial\phi=0} \prod_e i(\phi(e))$$

$\partial\phi = 0$ est une condition de Kirchhoff qui doit être réalisée en chaque

vertex :

$$0 = \partial\phi = \sum_{e \in E} Dve \cdot \phi(e)$$

où $Dve = 1$ si e aboutit en v , -1 si e part de v , 0 si v n'est pas une extrémité de e .

Ce type de "fonction de partition Y " est rencontré dans des problèmes comme ceux de la glace ou bien des problèmes de coloration (Tait colouring). Le théorème s'applique pour des applications i à valeur dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (donc pour des modèles où le "spin" a " m " états possibles. Si l'on considère la transformée de Fourier dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de i

$$\hat{i}(a) = |m|^{-1/2} \sum_{b \in \mathbb{Z}_m} i(b) \cdot e^{i \frac{ab}{m}} \quad \text{soit } Z(i, G) \text{ qui désigne la}$$

fonction de partition avec l'application particulière i et sur le graphe G .

Le théorème affirme l'égalité $Z(i, G) = m^{|V| - \frac{|E|}{2}} Y(\hat{i}, G)$ ($|V|$ désigne le nombre de vertex, E le nombre de liaisons).

On peut démontrer un autre théorème de dualité, géométrique celui-là. Il conduit à la relation :

$$Z(i, G) = m Y(i, \hat{G})$$

où $\hat{G}$ est le graphe dual du graphe G . On voit que si l'on compose ces deux dualités, on trouve :

$$Z(\hat{i}, \hat{G}) = m^{|V| - \frac{1}{2}|E|} Z(i, G) \text{ qui n'est rien d'autre que la dualité}$$

usuelle à la Wannier.

Quelques remarques : c'est la dualité géométrique qui restreint singulièrement la dualité. La dualité algébrique, elle, donnera des relations entre des modèles sur un même graphe et possède donc un domaine d'application considérable. Si l'on reprend les démonstrations de ces

deux théorèmes, on peut voir, en fait, que l'hypothèse selon laquelle l'application i doit être la même pour toutes les liaisons du graphe n'est pas nécessaire. Ces deux dualités pourront donc s'appliquer pour les milieux désordonnés (milieux non invariants par translation).

La dualité n'est pas réduite à ces modèles discrets : la dualité appliquée au modèle XY établit une correspondance entre ce même modèle et un modèle SOS (76).

Les points communs à toutes ces correspondances d'un modèle vers un autre sont les suivants : dans tous les cas, on somme sur une classe trop large de configurations. On doit imposer des conditions restreignant les configurations : $\sum_{e \in \Gamma} h_e = 0$. h_e désignant des variables de liaisons, désignant soit un cycle (condition de cobord donnant Z), soit un vertex (condition de bord donnant Y) ; ou bien, on impose à la variable d'être entière (Chui et Weeks (77), bien que cette correspondance ne soit pas une dualité au sens strict du terme). Toutes ces conditions se forment par des symboles δ de Kronecker, soit par des distributions δ . Dans un deuxième temps, on exprime ces divers " δ " comme des séries (formule de Poisson) ou des intégrales, ce qui introduit une nouvelle variable muette, entière dans le cas des séries, continue dans le cas des intégrales.

Utilisons ces idées générales pour trouver un résultat original, la dualité algébrique sur XY.

Partons d'un modèle SOS avec des conditions de bord en chaque vertex :

$$Z = \sum_{\substack{\{n_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ et } \sum_j n_{ij} = 0\} \\ n_{ij} = -n_{ji}}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{V(n_{ij})} \sim \int \prod_{\varphi \in [0, 2\pi]} \sum_{\{n \in \mathbb{Z}\}} e^{\sum_{\langle ij \rangle} V(n_{ij}) + 2i\pi \sum_i \varphi_i (\sum_j n_{ij})}$$

$$= \int \prod_{\varphi \in [0, 2\pi]} \sum_{\{n \in \mathbb{Z}\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{V(n_{ij}) + 2i\pi n_{ij} (\varphi_i - \varphi_j)}$$

$$= \int \prod_{\varphi \in [0, 2\pi]} e^{\tilde{V}(\varphi_i - \varphi_j)}$$

où $e^{\tilde{V}}$ est la transformée de Fourier de e^V : ce modèle SOS avec des conditions de bord en chaque vertex est donc équivalent à un modèle XY.

Reconsidérons maintenant cette même expression :

$$Z = \sum_{\substack{\{n \in \mathbb{Z} \\ \sum_j n_{ij} = 0\}}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{V(n_{ij})}$$

$$\sim \int \prod_{n_{ij} = -n_{ji}} \prod_{\{m \in \mathbb{Z}\}} e^{\sum_{\langle ij \rangle} 2imn_{ij} \cdot m_{ij} + V(n_{ij}) + \sum_i 2i\pi x_i (\sum_j n_{ij})}$$

(le terme $e^{2imn_{ij} \cdot m_{ij}}$ impose que n_{ij} soit entier ; le terme $e^{2i\pi x_i (\sum_j n_{ij})}$ impose la condition de bord $\sum_j n_{ij} = 0$). Considérons

une interaction gaussienne $V(n_{ij}) = -\alpha n_{ij}^2$

$$Z \sim \int \prod_{\{m \in \mathbb{Z}\}} \int \prod_{\{x\}} e^{-\sum_{ij} n_{ij}^2 + 2i \sum_{ij} n_{ij} (m_{ij} + x_i - x_j)}$$

$$\sim \int \prod_{\{m \in \mathbb{Z}\}} \int \prod_{\{x\}} e^{-\sum_{ij} \left(\frac{2\pi^2}{\alpha} (m_{ij} + x_i - x_j)^2 \right)}$$

Ce qui est exactement la méthode qu'utilise Villain⁽⁷⁸⁾ dans son modèle pour simuler simplement la fonction $e^{J \cos \theta}$.

REFERENCES

- (68) F.J. Wegner, Journal of Math Phys. 12, 2259 (1971 "Duality in generalized Ising models and Phase transitions without local order parameters.
- (69) L. Mitt and M.J. Stephen, Math. Phys. 12 441 n° 3 March 1971
Dual transformations in Many Component Ising Models.
- (70) Leo P. Kadanoff and Horacio Ceva, Phys. Rev. B 3 n° 11 1 June 1971:
Determination of an operator Algebra for the two-dimensional Ising Model.
- (71) Leo. P. Kadanoff : Lattice Coulomb Gas Representation of two-dimensional Problems (preprint).
- (72) Eduardo Fradkin, B.A. Huberman and Stephen H. Shebrin, Gauge symmetries in random magnetic systems. (preprint)
- (73) J. Jose, L.P. Kadanoff, S. Kirkpatrick, D. Nelson, Phys. Rev. B16 1217 (1977).
- (74) M.E. Peskin, Ann. Phys. (N.Y) 113, 122 (1978).
- (75) H.A. Kramers, G.H. Wannier, Phys. Rev. 60, 252 (1941).
- (76) Knops, Phys. Rev. Letters 39 766 (1977).
- (77) S.T. Chui et J.D. Weeks, Phys. Rev. B 14 4978 (1976).
- (78) J.Villain, J. of Physics C. 1717 (1977).
- (79) R. Fish et A.B. Harris, A.I.P. Conf. Proc. n° 29, (1976) p. 482

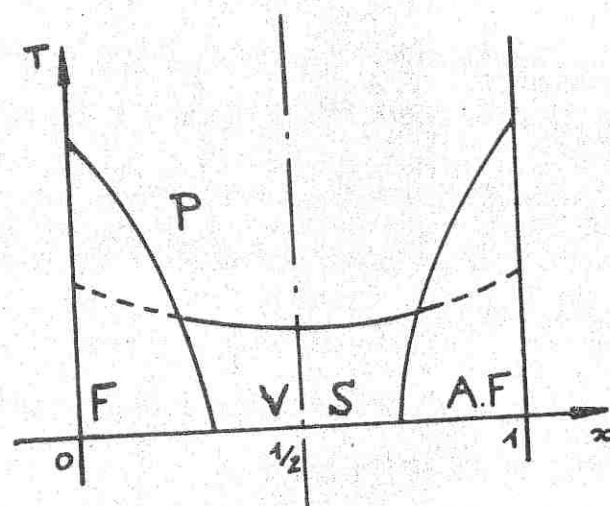


Diagramme de phase associé à la conjecture de la transition rugueuse.

TRANSITION RUGUEUSE

L'existence d'une connexion entre deux problèmes auparavant séparés, la transition rugueuse dont l'étude est faite en croissance cristalline et la transition verre de spin a été suggérée (80). Cette conjecture consiste à dire que la transition verre de spin (entre verre de spin et paramagnétique) est la continuation de la transition, rugueuse lorsque le désordre augmente. L'exposé de cette conjecture sortirait du cadre de cette thèse.

Elle semble cependant avoir reçu une première confirmation expérimentale par les travaux de Mc Guire, et al (81) et une étude plus détaillée de ce problème et des propriétés d'hystérésis va être entreprise en laboratoire.

REFERENCES

- (80) G. Toulouse, J. Vannimenus, J.M. Maillard, Le Journal de Physique Lettres 38, (1977).
- (81) Mc Guire T.R., T. Mizoguchi, R.J. Gambino and S. Kirkpatrick Magnetism conference in Minneapolis, November), Magnetic phase diagram of the Gd-Ai and Gd-Cu amorphous alloy (1977).

- (82) H.J. Leamy, G.H Gilmer, K.A. Jackson : "Statistical Thermodynamics of clean Surface" dans "Surface Physics of Materials", Vol. I p 121-188 (Blakely ed. A.C., New York) (1975).
- (83) R.H. Swendsen, Phys. Rev. B 15, 5421 (1977).

CONCLUSION

Dans de multiples approches des milieux désordonnés, on voit tenter de remplacer un système aléatoire par un système régulier équivalent : théorie du milieu effectif, approximation du potentiel cohérent... Pourtant, les expériences sont faites sur des milieux spécifiques et non sur des ensembles. Ce n'est que récemment que l'on s'est rendu compte qu'il n'était pas souhaitable de traiter ces milieux dans une approche de statistique conventionnelle. Ceci est étroitement relié au concept de non-ergodicité. Les systèmes aléatoires ne satisfont pas l'hypothèse d'ergodicité : ils ne parcourent pas entièrement ou uniformément l'espace des phases. (La localisation et la percolation en sont les exemples les plus simples). A l'opposé, une autre attitude consiste à ne retenir que l'irréversibilité du système en espérant seulement ajuster quelques constantes phénoménologiques. La description du système s'effectue en termes de "nuages" de spins (grains fins de Neel dans les conceptions les plus rigides). Un autre type de description phénoménologique très répandu consiste en l'utilisation de systèmes à deux niveaux.

Nous avons voulu rendre compte, bien partiellement, d'une nouvelle approche effectuée sur le problème des verres de spin, parce qu'il se situe dans la région intermédiaire où l'on peut encore espérer faire une théorie plus raffinée que la nucléation, autrement dit parce qu'il est à la limite de l'approche thermodynamique. Le pas important est que

cela nous conduit à étudier toute une nouvelle catégorie de phénomènes (non plus seulement des désordres de dilutions) mais aussi des désordres d'opposition (frustration) et à se poser de nouvelles questions : par exemple, quels sont les objets d'intérêt et leurs distributions respectives.

Le plan de cette thèse s'est efforcé de séparer ma contribution personnelle ou en collaboration au sein du groupe de physique des solides de l'E.N.S. des approches traditionnelles, classiques exposées dans le premier chapitre. Ainsi, dans le chapitre II, j'ai exposé la solution de modèles frustrés périodiques pour montrer qu'il pouvait y avoir une transition malgré l'annulation de l'énergie de défaut, et des calculs sur l'énergie d'interface sur des modèles périodiques frustrés également. Le chapitre III rend compte d'expériences numériques effectuées sur des systèmes désordonnés, qui ont mis en évidence une rigidité inattendue de l'état de base du système. Enfin, le dernier chapitre contient des réflexions sur d'autres approches possibles (dualité, conjecture sur la relation entre transition rugueuse et transition verre de spin). Les perspectives dans ce problème des verres de spin sont de plusieurs ordres, le sujet étant en pleine expansion. D'une part, on peut essayer de résoudre d'autres modèles périodiques (87) exactement (ou certains modèles unidimensionnels) mais il faudra avoir choisi ces modèles en fonction d'idées provenant d'expériences numériques et non pour leur seul critère de solubilité. D'autre part, on peut chercher à relier divers problèmes les uns aux autres sans pour autant chercher à les résoudre. Au premier rang de ces correspondances d'un

problème sur un autre, figure la dualité qui peut être un outil beaucoup plus riche qu'on ne le pense usuellement et notamment pour ces problèmes désordonnés. On peut peut-être espérer d'autre part des résultats mathématiques très généraux sur des systèmes désordonnés (je pense à des résultats analogues à ceux de Griffiths sur les modèles ordonnés) ou plus particuliers (je pense aux résultats obtenus récemment par Mc Coy et Wu (88) sur les fonctions de Green avec un nombre quelconque de points dans le modèle d'Ising ; de plus amples informations sur ces fonctions de Green seraient, nous l'avons vu, infiniment précieuses, dans le cas du modèle d'Ising frustré).

Et enfin, il y a l'approche numérique qui, elle, dans tous les cas, fera avancer les choses, que ce soit par des calculs Monte-Carlo où par des utilisations plus ingénieuses de l'ordinateur. Deux bons exemples sont l'étude des zéros de la fonction de partition d'un modèle d'Ising en dimension deux pour des systèmes aléatoires de petite taille (3×3 , 4×4 ...) et la recherche du fondamental de modèles d'Ising frustrés aléatoires en utilisant un théorème très puissant de programmation linéaire (R. Meynard et R. Rammal, deux articles à paraître).

Enfin, la notion d'invariance locale approximative, à un niveau semi-macroscopique, proposée par I. Dzyaloshinskii et G. Volovik, ouvre les verres de spin aux théories de jauge développées en théorie des champs. Cette approche est encore à l'état naissant et ses conséquences

sont loin d'avoir été systématiquement explorées. (85,86)

REFERENCES

- (84) I.E. Dzyaloshinskii : "Domains and dislocations in antiferromagnets", Journal de Physique 39 695 (1978).
- (85) I.E. Dzyaloshinskii, G.E. Volovik : "Localized modes in spin glasses". Sub. ZhETF (Sov. Phys. J.E.T.P.).
- (86) Alexander Pincus, "Phase transitions of some fully frustrated models", preprint.
- (87) T.T. Wu, B.M.C. Coy, C.A. Tracy and E. Barouch, Phys. Rev. B 13 (1976)
- (87 bis) D.B. Abraham, Physics Letters 61 A 271, (1977).

APPENDICE N° 1

MODELES REQUIS

A) Imposer une concentration de liaisons antiferromagnétiques par l'intermédiaire d'un potentiel chimique conduit à calculer une grande fonction de partition.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\mu_{ij}\}} \sum_{\{s_i\}} e^{\langle \mu_{ij} \rangle J \mu_{ij} s_i s_j + \ln X \mu_{ij}} \quad (\mu_{ij} = \pm 1) \\ &= \sum_{\{s_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} (X e^{J s_i s_j} + \frac{1}{X} e^{-J s_i s_j}) = \sum_{\{s_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} (A e^{K s_i s_j}) \end{aligned}$$

$$\text{avec } A^2 = (X e^J + e^{-J} X^{-1}) (X e^{-J} + X^{-1} e^J)$$

$$e^{2K} = \frac{X^2 e^{2J} + 1}{X^2 + e^{2J}} \quad \text{et surtout} \quad \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln X} = X \quad (1)$$

s désigne un spin ; ln X est un potentiel chimique.

B) Imposer une concentration en introduisant une probabilité pour chaque liaison d'être antiferromagnétique (soit x) conduit à calculer :

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{s\}} \prod_{\langle ij \rangle} (x e^{-J s_i s_j} + (1-x) e^{J s_i s_j}) \\ &= \sum_{\{s\}} \prod_{\langle ij \rangle} A e^{K s_i s_j} \quad \text{avec } e^{2K} = \frac{(x/1-x) + e^{2J}}{(x/1-x) e^{2J} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Notons } \langle Z \rangle = \sum_{\{J_{ij}\}} P(\{J_{ij}\}) \cdot Z(\{J_{ij}\})$$

où $\sum_{\{J_{ij}\}}$ désigne la sommation sur les configurations de liaisons et où "P" désigne la probabilité associée à une configuration. On calcule donc $\ln \langle Z \rangle$

Remarque : $x e^{-J s_i s_j} + (1-x) e^{J s_i s_j} = \text{ch } J \cdot (1 + (1-2x) \cdot \text{th } J \cdot s_i s_j)$.

Dans le développement haute température du modèle d'Ising, on change donc thJ en $(1-2x)thJ$ et ceci, nous l'avons vu en début du chapitre II peut s'interpréter très simplement en termes de graphes.

C) Imposer une concentration de plaquettes frustrées en introduisant une probabilité pour chaque plaquette d'être ou non frustrée revient à calculer :

$$\langle Z \rangle = \sum_{\{J_{ij}\}} \sum_{\{s\}} e^{\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i s_j} \cdot \Pi (c \cdot \delta(\phi_\alpha + 1) + (1-c) \delta(\phi_\alpha - 1))$$

$$\sim \sum_{\{s\}} \sum_{\{J\}} e^{\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i s_j + \sum_{\alpha} \phi_\alpha} \quad (1)$$

avec $\frac{e^{-\mu}}{e^{\mu} + e^{-\mu}} = c$ ($\phi_\alpha = 1$ si la plaquette α n'est pas frustrée ;

$\phi_\alpha = -1$ sinon)

Si l'on effectue une dualité (voir appendice n° 9) sur (1), on obtient :

$$Z \approx \sum_{\{\phi_\alpha\}} \sum_{\{\mu_\alpha\}} \left(\prod_{\langle \alpha\beta \rangle} (thJ_{ij})^{-\frac{1}{2}(\mu_\alpha \mu_\beta - 1)} \right) \cdot \left(\prod_{\alpha} e^{\mu_\alpha \cdot \phi_\alpha} \right)$$

où ij et $\alpha\beta$ sont des liaisons duales les unes des autres).

Notons $sg(J_{ij})$ le signe de la variable J_{ij} , il est facile de voir que du fait que $sg(J_{ij})$, μ_α , ϕ_α valent ± 1 , on a l'identité :

$$\prod_{\langle \alpha\beta \rangle} (sg(J_{ij}))^{-\frac{1}{2}(\mu_\alpha \mu_\beta - 1)} = \prod_{\alpha} (\phi_\alpha)^{-\frac{1}{2}(\mu_\alpha - 1)} \quad \text{d'où}$$

$$Z \sim \sum_{\{\phi_\alpha\}} \sum_{\{\mu_\alpha\}} \left(\prod_{\langle \alpha\beta \rangle} (|thJ_{ij}|)^{-\frac{1}{2}(\mu_\alpha \mu_\beta - 1)} \right) \left(\prod_{\alpha} e^{\mu_\alpha \phi_\alpha} (\phi_\alpha)^{-\frac{1}{2}(\mu_\alpha - 1)} \right)$$

effectuons d'abord la sommation sur les ϕ_α

$$Z \sim \sum_{\{\mu_\alpha\}} \left(\prod_{\langle \alpha\beta \rangle} |thJ_{ij}|^{-\frac{1}{2}(\mu_\alpha \mu_\beta - 1)} \right) \cdot (e^{\mu} + e^{-\mu} \mu_\alpha)$$

$$\sim \sum_{\{\mu_\alpha\}} \exp \left\{ \sum_{\langle \alpha\beta \rangle} |J_{ij}|^* \mu_\alpha \mu_\beta + \sum_{\alpha} \mu_\alpha^* \cdot \mu_\alpha \right\}$$

Nous retrouvons le résultat de R. Balian, J.M. Drouffe et Itzykson (6).

Imposer une telle condition revient en fait à chercher la fonction de partition du modèle d'Ising en champ magnétique.

APPENDICE N° 2

METHODE DES REPLIQUES

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n}$$

$$\langle Z^n \rangle = \sum_{\{J_{ij}\}} \sum_{\{\alpha_i\}} P(\{J_{ij}\}) \cdot e^{\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha}$$

σ_i^α est un spin d'Ising ; α indexe les répliques ; i, j indexent les sites.

(Sous réserve que l'on puisse permuter la moyenne sur les J_{ij} avec la limite $n \rightarrow 0$ et ensuite avec la sommation sur les configurations de spins).

$$= \sum_{\{\alpha_i\}} \left(\prod_{ij} \langle \exp J_{ij} \sum_{\alpha=1}^n \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \rangle \right) = \sum_{\{\alpha_i\}} \exp \left(\sum_{ij} \langle J_{ij} \rangle_{\text{eff}} \right)$$

où l'hamiltonien effectif invariant par translation est égal à (en posant

$$\sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha = S_{ij}^\alpha)$$

$$\ln \langle \exp J_{ij} \sum_{\alpha=1}^n S_{ij}^\alpha \rangle = K_{ij}^{(0)} + K_{ij}^{(1)} \sum_{\alpha_1} S_{ij}^{\alpha_1} + \dots + K_{ij}^{(n)} \sum_{\alpha_1} S_{ij}^{\alpha_1} \dots S_{ij}^{\alpha_n}$$

où les $K_{ij}^{(l)}$ sont des cumulants.

Signalons une approximation fréquente (independent systems approximation)

qui consiste à écrire S_{ij}^α comme une perturbation autour d'une valeur

commune à toutes les répliques $S_{ij}^\alpha = \langle S \rangle + \Delta S_{ij}^\alpha$

$$\sum_{\alpha_1 \neq \dots \neq \alpha} S_{ij}^{\alpha_1} \dots S_{ij}^{\alpha_l} = \langle S \rangle^l C_n^l + \sum_{\alpha_1} \Delta S_{ij}^{\alpha_1} \cdot \langle S \rangle^{l-1}$$

Cette approximation découple les répliques.

Les calculs conduits avec des distributions gaussiennes sont très nombreux ; il faut calculer :

$$\int \prod_{ij} \int_{S_i} e^{\sum_{\alpha} \langle J_{ij} \rangle_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha}} e^{-\frac{J_{ij}^2}{2J^2}}$$

Intervertissons les deux intégrations, celle effectuée sur les J_{ij}

conduit à un terme $(\sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha})^2 = n + \sum_{\alpha \neq \beta} S_i^{\alpha} S_i^{\beta} S_j^{\alpha} S_j^{\beta}$ qui couple les répliques. Cette expression est le point de départ de la plupart des analyses.

APPENDICE N° 3

I.S.G.

Les hypothèses de l'idéal spin glass sont que la probabilité soit invariante de jauge :

$$P(\{J_{ij}\}) = P(\{\epsilon_i \epsilon_j J_{ij}\}) ; \epsilon_i = \pm 1$$

Calculons

$$\begin{aligned} \overline{\langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle} &= \mathcal{D}_{J_{ij}} P(\{J_{ij}\}) \frac{\text{Tr}(S_i^\alpha S_j^\beta \exp(-\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i^\alpha S_j^\beta))}{\text{Tr}(\exp(-\sum_{\alpha} \sum_{ij} J_{ij} S_i^\alpha S_j^\alpha))} \\ &= \mathcal{D}_{J_{ij}} P(\{J_{ij}\}) \frac{\text{Tr}(S_i^\alpha S_j^\beta \epsilon_j e^{-H'})}{\text{Tr}(e^{-H'})} \end{aligned}$$

où $H' = \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\alpha} J_{ij} \epsilon_i \epsilon_j S_i^\alpha S_j^\alpha$; on a effectué un changement des

variables de spin .

$$= \mathcal{D}_{J_{ij} \epsilon_i \epsilon_j} P(\{J_{ij} \epsilon_i \epsilon_j\}) \frac{\text{Tr}(S_i^\alpha S_j^\beta \epsilon_j e^{-H''})}{\text{Tr}(e^{-H''})}$$

($H'' = \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\alpha} J_{ij} \epsilon_i^2 S_i^\alpha S_j^\alpha$; on a effectué en plus un changement des variables de liaison.

$$\rightarrow \overline{\langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle} = \epsilon_i \epsilon_j \overline{\langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle}$$

$$\rightarrow \overline{\langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle} = \delta_{ij} \overline{\langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle}$$

L'invariance par rotation implique finalement que

$$\overline{\langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle} = \delta_{ij} \cdot \delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{S^2}{n}$$

De façon analogue, on a pour :

$$\overline{\langle S_i^\alpha \rangle \langle S_j^\beta \rangle} = \mathcal{D}_{J_{ij}} P(\{J_{ij}\}) \frac{\text{Tr}(S_i^\alpha e^{-H}) \cdot \text{Tr}(S_j^\beta e^{-H})}{(\text{Tr} e^{-H})^2}$$

$$\overline{\langle S_i^\alpha \rangle \langle S_j^\beta \rangle} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \overline{\langle S_i^\alpha \rangle^2}$$

où l'on reconnaît le paramètre Q d'Edwards-- Anderson.

$$\overline{\langle S_i^\alpha \rangle \langle S_j^\beta \rangle} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} Q/n$$

d'où pour le tenseur de la susceptibilité en champ nul :

$$\overline{\chi_{\alpha\beta}}(q) = \frac{1}{NT} \sum_{i,j} e^{iq(i-j)} (\overline{\langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle} - \overline{\langle S_i^\alpha \rangle} \overline{\langle S_j^\beta \rangle}) = \delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{S^2 - Q}{nT}$$

Par une généralisation immédiate de ces démonstration, on prouve que les fonctions de Green où au moins un site apparaît un nombre impair de fois sont nulles.

LE MODELE DE Mc COY ET WI

La fonction de partition peut être évaluée comme une matrice anti-symétrique (Kasteleyn 1963). Un exemple de ces matrices est donné dans l'appendice n° 7. Dans ce modèle précis Z varie aléatoirement de colonne en colonne mais prend la même valeur dans toute cette colonne (fig). On effectue alors une transformée de Fourier selon l'axe vertical. Il faut calculer le déterminant de la matrice $2M \times 2M$.

$$\begin{bmatrix} ia & b & & & & & & & \\ -b & -ia & Z_2(1) & & & & & & \\ & -Z_2(1) & ia & b & & & & & \\ & & b & -ia & Z_2(2) & & & & \\ & & & -Z_2(2) & & & & & \\ & & & & & Z_2(1) & & & \\ & & & & & -Z_2(M-1) & ia & b & \\ & & & & & & -b & -ia & \end{bmatrix}$$

avec $Z_2(j) = \text{th} K_2(j)$, $a = -2Z_1 \sin \theta \cdot |1+Z_1 e^{i\theta}|^{-2}$, $b = (1-Z_1^2) |1+Z_1 e^{i\theta}|^{-2}$

Une telle matrice peut être calculée par récurrence en appelant c_n le déterminant de la matrice Z_n lignes $2n$ colonnes (dont le terme $c_{2n,2n}$ est $-ia$) et D_n le déterminant de la matrice $(2n+1) \times (2n+1)$ (dont le terme $D_{2N+1,2N+1}$ est ia).

On a alors $\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2+b^2 & aZ_2^2(n) \\ -a & Z_2^2(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}$

Appelons $\lambda(n) = Z_2^2(n)$ la variable aléatoire du problème avec sa distribution de probabilité associée

Nous voulons calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln D_n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \ln \frac{D_m}{D_{m-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \ln(\lambda - a) \frac{C_n}{D_{n-1}}$$

Appelons $x_m = D_m/C_m$; on passe de x_m à un x_{m+1} par un homographie (+) (aléatoire dans le cas présent). Des travaux de Furstenberg démontrent que l'on tend pour les x_m vers une distribution stationnaire unique. On détermine cette distribution en écrivant qu'elle est stable en moyenne :

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_0^1 d\lambda \cdot \delta(x - \frac{(a^2+b^2)x'+a}{ax'+1}) \mu(\lambda) v(x') \\ &= \frac{b^2}{(x-a)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |x'| \cdot \mu(x' \frac{a^2+b^2-ax}{x-a}) v(x') \end{aligned}$$

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} dx v(x) \int_0^1 d\lambda \cdot \mu(\lambda) \cdot [n(\lambda+ax)]$$

$$(+)\ x_{n+1} = \frac{(a^2+b^2)x_n + a\lambda(n)}{ax_n + \lambda(n)}$$

REFERENCES

(88) H. Furstenberg, Trans. Am. Math. Soc. 108, 377 (1963).

APPENDICE N°5

LE MODELE DE FAN ET MC COY

(C. Fan and B. Mc Coy, Phys. Rev. 182 614 (1964))

C'est un modèle d'Ising unidimensionnel en champ uniforme avec énergie d'échange aléatoire. L'hamiltonien de ce système est :

$$H = - \sum_i J_i S_i S_{i+1} - H \sum_i S_i$$

la méthode de la matrice de transfert conduit à un produit aléatoire de matrices 2×2 : $(wZ_n)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & Z_n \\ wZ_n & w \end{pmatrix} = T_n$

$$\text{où } w = e^{-2H} \quad Z_n = e^{-2J_n}$$

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = (T_n) \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{U_n + V_n}{U + V} = -\beta F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \ln \frac{U_{m+1} + V_{m+1}}{U_m + V_m}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left[-\frac{1}{2} \ln(wZ_n) + \ln \left(\frac{(U_n + Z_n V_n) + (wZ_n U_n + wV_n)}{U_n + V_n} \right) \right]$$

Si l'on appelle $x_n = V_n/U_n$, on passe de x_n à x_{n+1} par un homographie aléatoire. La distribution des x_n est donnée par l'équation fonctionnelle.

$$v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dJ P(J) \cdot v(x') \cdot \delta \left(x - w \cdot \left(\frac{Z(J) + x'}{1 + Z(J)x'} \right) \right) \quad (I)$$

$$-\beta\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \ln(wZ_m)^{-1/2} + \int dJ dx P(J) v(x) \ln \left[\frac{1 + Z(J)x + wZ(J)wx}{1+x} \right]$$

On peut calculer F pour une configuration donnée ; notons-le alors.

$F(\{J_i\})$, on peut se convaincre que le F calculé ci-dessus est égal à $\int dJ_i P(\{J_i\}) F(\{J_i\})$ où $P(\{J\})$ est la probabilité de rencontrer la configuration $\{J\}$.

L'équation fonctionnelle (I) est en général impossible à résoudre analytiquement. A température nulle, elle perd tout sens ; c'est pourquoi, nous proposons une résolution exacte du modèle de Fan et Mc Coy lorsque $P(J) = x \delta(J+J_0) + (1-x) \delta(J-J_0)$ à température nulle.

Modèle d'Ising aléatoire en champ constant (voir ref. (44) dans chapitre II)

La méthode de la matrice de transfert conduit au produit aléatoire de la matrice.

$$T_1 = \begin{pmatrix} Z^{-1+\alpha} & Z^{1+\alpha} \\ Z^{1-\alpha} & Z^{-1-\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{avec la probabilité } x$$

$$\text{et } T_2 = \begin{pmatrix} Z^{1+\alpha} & Z^{-1+\alpha} \\ Z^{-1-\alpha} & Z^{1-\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{avec la probabilité } 1-x$$

$$Z = e^J \quad \alpha = H/J$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad \text{ce produit matriciel aléatoire à l'ordre } n.$$

On peut montrer que $\frac{a_n}{d_n}$ est borné inférieurement et supérieurement : on peut se restreindre à l'étude de a_n et b_n :

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n) \cdot T(n)$$

A température nulle, il suffit de regarder le terme qui possède le plus grand exposant pour Z .

$$a_n = Z^n \cdot e_n^U \quad b_n = Z^n \cdot c_n^V$$

Le point fondamental est que c ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. On se ramène à des récurrences aléatoires sur ces exposants et à la recherche d'une distribution invariante.

L'énergie de l'état de base E_0 est

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle \xi_N \rangle}{N} \cdot \ln Z = \ln Z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle \xi_N - \xi_{N-1} \rangle + \langle \xi_{N-1} - \xi_{N-2} \rangle + \dots}{N}$$

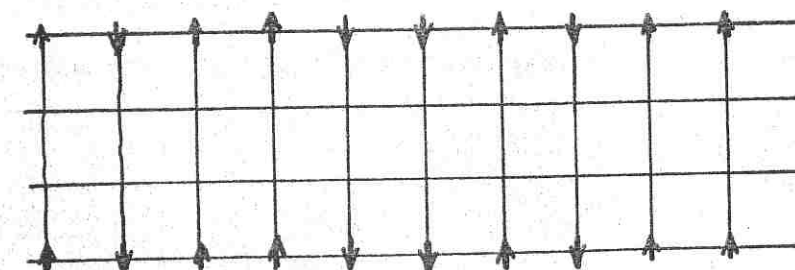
$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \xi_{N+1} - \xi_N \rangle \cdot \ln Z$$

L'entropie résiduelle S_0 vaut $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle U_{N+1} - U_N \rangle$

Les résultats sont les suivants :

$$\frac{E_0}{J} = \frac{r^2 x^2 + rx(2-x) + (2x-1)(x-1) + (2rx(1-x) + 1-x)}{(1+rx)(1+rx-x)}$$

$$\frac{S_0}{k_B} = \frac{x(1-x)^2}{(1+(r-1)x)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \cdot \ln(n)$$



Modèle des rubans
Conditions périodiques.

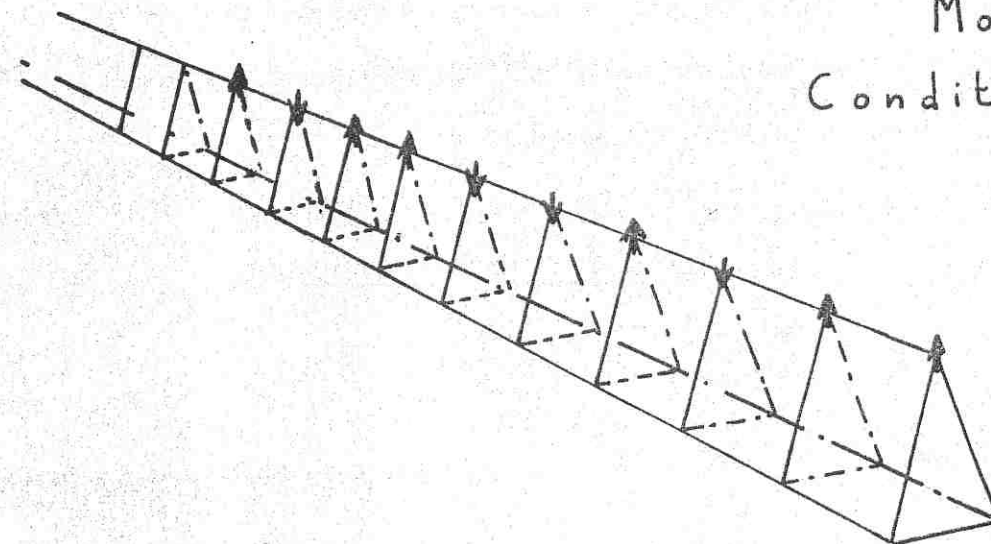


Figure 69

$$\mu = \frac{rx^2}{1-x+rx}$$

Modèles de rubans

Il s'agit de chaînes d'Ising en nombre fini couplées entre elles, où les liaisons sont prises avec la probabilité usuelle (x d'avoir $-J$, $1-x$ d'avoir $+J$). L'on impose des conditions périodiques (fig. 69). Des calculs exactement analogues donnent pour deux chaînes.

$$E_{0/J} = -1/4 \frac{10-3Z^2+8Z^4+Z^6}{2-Z^2+Z^4}$$

en posant $Z = 1-2x$

L'entropie est obtenue comme une somme sur les points que l'on peut atteindre à partir des deux opérations $t \rightarrow 2+t$ et $t \rightarrow 2+1/t$

$$S = \sum_{\{t\}} Q(t) \cdot \ln(t) \text{ où } Q \text{ est une fraction rationnelle ((44) chapitre II).}$$

APPENDICE N° 6

MODELE DE RUBANS

Nous regardons dans cet appendice des modèles de rubans où seules sont aléatoires les liaisons verticales (fig. 70). Considérons le modèle de la figure. La matrice de transfert fait passer d'un "superspin d'Ising" $(S_i^1, S_i^2, S_i^3, S_i^4)$ à l'ordre i à son suivant à l'ordre $i+1$: la matrice est donc une matrice $2^4 \times 2^4$. Divisons ces 2^4 états de superspin en deux groupes tels que l'un s'obtienne à partir de l'autre en renversant tous les spins Ex: $(++++)$ $(++-+)$ et $(----)$ $(--+-)$... (I).

La matrice de transfert est le produit d'une matrice traduisant l'interaction entre superspins d'ordres i consécutifs et une matrice diagonale traduisant la self-énergie du superspin :

$$T = \begin{pmatrix} A(Z) & -A(Z^{-1}) \\ -A(Z^{-1}) & A(Z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \text{ où } Z = e^K$$

Considérons la matrice de passage P , faisant passer ces 2^4 états ordonnés selon (I), à leur symétrisés et antisymétrisés respectant l'ordre de chacun des deux sous-groupes.

$$\frac{++++}{2} + \frac{----}{2} \text{ et } \frac{+++-}{2} - \frac{--+-}{2} \text{}$$

$$P = \begin{pmatrix} I/2 & I/2 \\ I/2 & -I/2 \end{pmatrix} \text{ (où } I \text{ désigne la matrice identité).}$$

$$T' = P^{-1} \cdot T \cdot P = \begin{pmatrix} (A(Z)-A(Z^{-1})) \cdot \Delta & 0 \\ 0 & (A(Z)+A(Z^{-1})) \cdot \Delta \end{pmatrix}$$

Dans ce problème, tout aléatoire réside dans Δ . Pour la recherche de la fonction de partition, il suffit de se restreindre à $(A(Z) + A(Z^{-1})) \cdot \Delta$.

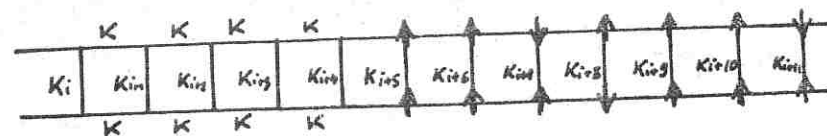
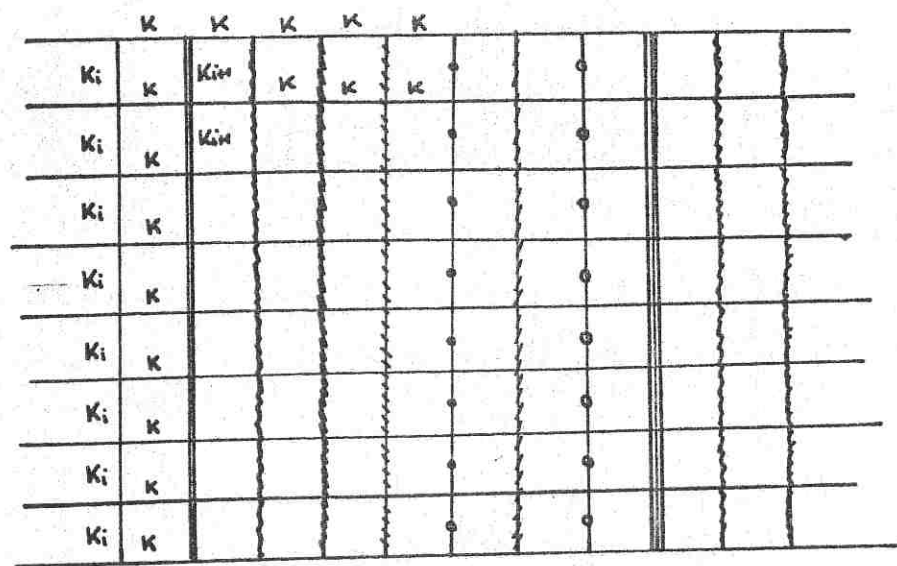


Figure 70

Regardons maintenant un cas où l'on peut tirer parti de cette réduction : le modèle avec deux chaînes couplées (fig 70). Le calcul précédent nous ramène au produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 \operatorname{ch} 2K & 2 \\ 2 & 2 \operatorname{ch} 2K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{K_i} & 0 \\ 0 & e^{-K_i} \end{pmatrix} \quad \text{où ce qui revient au même :}$$

$$(\operatorname{ch} 2K \cdot I + P) \cdot \Delta^a_i \quad (\text{où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} e^{|K_i|} & 0 \\ 0 & e^{-|K_i|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{K'} & 0 \\ 0 & e^{-K'} \end{pmatrix} ;$$

tout l'aléatoire repose sur a_i).

Chaque terme de ce produit de matrices aléatoires est une suite des matrices $\operatorname{ch} 2K \cdot I \cdot \Delta^a$ et $P \cdot \Delta^a_i$.

$$(\operatorname{ch} 2K^a_i \cdot \operatorname{ch} 2K^a_{i+1} \cdot P \Delta^a_{i+2} \cdot \operatorname{ch} 2K^a_{i+3} \cdot P \Delta^a_{i+4} \dots)$$

Or, les Δ^a_i compris entre deux P se transforment en leur inverse (car $P \Delta^a_i P = \Delta^{-a_i}$). Ainsi, se donner un terme de ce produit revient à dire pour chaque Δ^a_i s'il intervient par $\Delta^{\varepsilon_i a_i}_i = \Delta^a_i$ ou $\Delta^{\varepsilon_i a_i}_i = \Delta^{-a_i}$.

La configuration des ε_i détermine biunivoquement un terme du produit ; le terme multiplicatif est $(\operatorname{ch} 2K)^{N-L}$ où "L" est le nombre de matrices P. L'existence d'un P est chaque fois trahie par un changement de signe dans deux ε_i consécutifs :

$$\sum \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = N - 2L$$

$$\text{D'où } Z = \sum_{\{\varepsilon\}} \operatorname{Tr} (\Delta^a_i \varepsilon_i \cdot \operatorname{ch} 2K^{\frac{N + \sum \varepsilon_i \varepsilon_{i+1}}{2}})$$

Ce modèle revient donc exactement à la chaîne ferromagnétique d'Ising dans un champ aléatoire (+) ; le champ a pour valeur absolue K' et

(+) pour laquelle le calcul explicite a été effectué par Derrida et al;

et l'énergie d'échange est $1/2 \ln \text{ch} 2K$. Il est intéressant de remarquer que l'on aurait pu obtenir ce résultat en appliquant (deux fois consécutives) la dualité (voir appendice n°9B) ; dualité appliquée aux modèles unidimensionnels) et l'on aurait obtenu le même résultat $((2K^*)^*)^* = 1/2 \ln \text{ch} 2K$.

APPENDICE N° 7

MODELES PERIODIQUES

A) LE MODELE EN BRETELLE

Pour calculer la fonction de partition de ces modèles, nous utilisons l'approche en termes de dimères du problème d'Ising, qui conduit au calcul d'un pfaffien, ou ce qui revient au même au déterminant d'une matrice antisymétrique dont nous donnons les composantes :

$$A(j, k ; j, k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \alpha$$

$$A(j, k ; j, k+1) = -A^t(j, k+1 ; j, k) = \begin{bmatrix} 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \beta(Z)$$

(A^t désigne la transposée de la matrice A ; $Z = \text{th} K$).

$$A(j, k ; j+1, k) = -A^t(j+1, k ; j, k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \gamma(Z)$$

Considérons le système défini par la figure () (modèle en bretelle).

Si j est paire : $A(j, k ; j, k+1) = \beta(Z_1)$

Si j est impaire : $A(j, k ; j, k+1) = \beta(-Z_3)$

Dans tous les cas : $A(j, k ; j+1, k) = \beta(Z_2)$

Notons $\varepsilon(j)$ la parité de j . Nous pouvons utiliser la périodicité du système, en effectuant une transformation de Fourier par rapport aux deux axes, qui respecte la parité. Une telle transformation ne modifie pas le déterminant.

$$\det A = \det(A(h, \varepsilon(j), k; h', \varepsilon(j'), K')) \cdot \delta(h-h') \delta(k-k') = \pi \det A_{h,k}(\varepsilon, \varepsilon').$$

avec

$$A_{h,k}(\varepsilon, \varepsilon') = \begin{bmatrix} \alpha + \beta(Z_1)e^{ik} - \beta^t(Z_1)e^{-ik} & \gamma(Z_1)e^{ih} - \gamma^t(Z_2)e^{-ih} \\ \gamma(Z_2)e^{ih} - \gamma^t(Z_2)e^{-ih} & \alpha + \beta(-Z_3)e^{ik} - \beta^t(-Z_3)e^{-ik} \end{bmatrix}$$

Il faut donc calculer un déterminant de la forme $\det \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} =$

$$\det A \cdot \det B \cdot \det(I - A^{-1}CB^{-1}C).$$

A est une matrice 4×4 ; écrivons A^{-1} sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad (x, y \dots \text{matrices } 2 \times 2); \text{ de même } B^{-1} = \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I & -yct'c \\ 0 & I - tct'c \end{bmatrix} = \det(I - tct'c)$$

$$t = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \quad \text{avec } p = 1 - (1 - Z_1 e^{-ik})^{-1} + (-1 + Z_1 e^{ik})^{-1}$$

$$q = (-1 + Z_1 e^{ik})^{-1} + (1 - Z_1 e^{-ik})^{-1}$$

$$t' = \begin{bmatrix} p' & q' \\ q' & p' \end{bmatrix} \quad \text{où } p' \text{ et } q' \text{ sont obtenus en remplaçant dans } p \text{ et } q$$

$$Z_1 \text{ par } -Z_3.$$

$$\det(I - tct'c) = 1 + Z_2^4(p^2 - q^2)(p'^2 - q'^2) - 2Z_2 qq' - 2Z_2 pp' \cos 2h.$$

Le calcul donne

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} = (1 + Z_1^2)(1 + Z_2^4)(1 + Z_3^2)$$

$$- 2Z_1 Z_3 (1 + Z_2^4)(1 + \cos 2k) + 2 \cos k (Z_1 - Z_3)(Z_1 Z_3 - 1)(1 - Z_2^4)$$

$$- 4Z_2^2 Z_1 Z_3 (1 - \cos 2k) - 2Z_2^2 (1 - Z_1^2)(1 - Z_3^2) \cos 2h$$

$$= 1/2 \left\{ (1 + Z_1^2)(1 - Z_3^2) [(1 - Z_2^2)^2 + (1 + Z_2^2)^2] - 4Z_1 Z_3 (1 + Z_2^2)^2 \right\}$$

$$+ 2 \cos k (Z_1 - Z_3)(Z_1 Z_3 - 1)(1 - Z_2^2)(1 + Z_2^2)$$

$$- 2 \cos 2k Z_1 Z_3 (1 - Z_2^2)^2 - 2Z_2^2 (1 - Z_1^2)(1 - Z_3^2) \cos 2h \quad (I)$$

$$\text{En utilisant les égalités } \text{ch} 2K = \frac{1 + Z_1^2}{1 - Z_1^2} \dots$$

On obtient :

$$\frac{\ln Z}{N} = \ln 2 + \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln f(k, h) \cdot dk \cdot dh.$$

$$\text{avec } f(k, h) = 1/2 \{ \text{ch } 2k_1 \text{ch } 2k_3 + \text{ch}^2 2k_2 \text{ch}^2 (k_1 + k_3)$$

$$- \text{sh}^2 2k_2 \cdot \cos 2h - \text{ch} 2k_2 \cdot \text{sh} 2(k_1 + k_3) \cdot \cos k + \text{sh} 2k_1 \cdot \text{sh} 2k_3 \cdot \cos 2k \}$$

La température critique est obtenue pour

$$\text{ch} 2k_2 \text{sh}(k_1 + k_3) = \text{ch}(k_1 + k_3)$$

$$\text{sh} 2k_2 \text{sh}(k_1 + k_3) = \pm 1$$

$$\frac{1 + Z_3}{1 - Z_3} = Z_2^2 \cdot \frac{1 + Z_4}{1 - Z_4}$$

$$0 = \frac{k_1 + k_3}{2} - k_2^*$$

Il est immédiat de vérifier que les énergies d'interface données au deuxième chapitre pour ce modèle s'annulent à T_c .

Ces calculs sont assez longs; Remarquons qu'il est possible de calculer très rapidement le T_c de ces modèles, en constatant que pour $q = 0$ ou le déterminant au lieu d'être antihermétique est antisymétrique et peut donc être calculé comme un Pfaffien :

$$\begin{vmatrix} 1+Z_1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & Z_2 \\ & & & 0 & 0 & -Z_2 & 0 \\ & & & & 1-Z_3 & -1 & -1 \\ & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix} = (1+Z_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z_2 \\ & 0 & 0 & -Z_2 & 0 \\ & & 1-Z_3 & -1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -Z_2 & 0 \\ & & 1-Z_3 & -1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & Z_2 \\ & & 1-Z_3 & -1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+Z_1) \left[\begin{vmatrix} 1-Z_3 & -1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{vmatrix} + Z_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -Z_2 \\ & 1-Z_3 & -1 \\ & & 1 \end{vmatrix} \right] + (-2) \begin{vmatrix} 1-Z_3 & -1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1+Z_1) \begin{vmatrix} 1-Z_3 & -1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{vmatrix} + (1+Z_1) Z_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -Z_2 \\ & 1-Z_3 & -1 \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

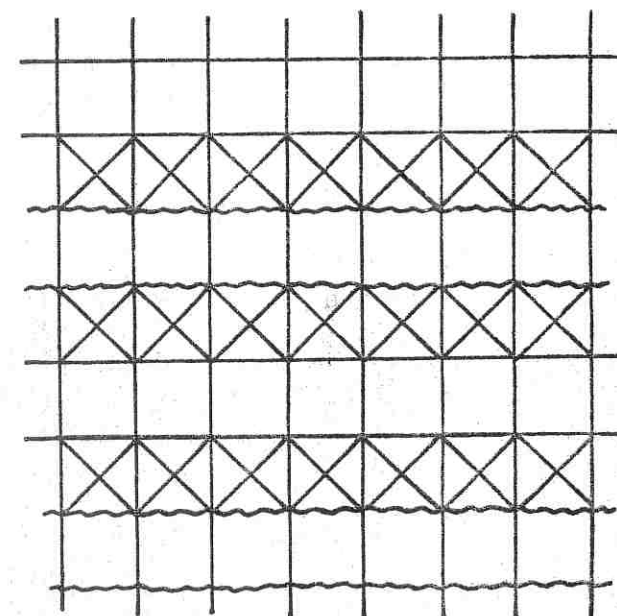
$= (Z_1-1)(-1-Z_3) - Z_2^2 (1-Z_3)(1+Z_1)$. La température critique est donnée pour

$$\frac{1+Z_3}{Z_3-1} = Z_2^2 \frac{1+Z_1}{Z_1-1}$$

On peut s'étonner qu'une expression aussi compliquée (I) soit définie positive et que ses racines par rapport à toutes les variables Z_1, Z_2, Z_3, q, h soient des racines doubles. Cela vient de ce que le déterminant de la matrice avant transformée de Fourier est antisymétrique : c'est donc le carré d'un Pfaffien.

| | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 |
| Z_2 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 |
| Z_3 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 |
| Z_2 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 |
| Z_3 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 |
| Z_2 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 |
| Z_3 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 | Z_1 |

$$Z_i = \tanh K_i$$



$$Z_3 < 0$$

~~~~~ : liaisons

X : plaquettes négatives frustrées

Figure 71

APPENDICE N°7

MODELES PERIODIQUES

B) Considérons le modèle défini par la figure (71). Comme dans le premier exemple la transformation de Fourier relative aux deux directions et respectant non plus la parité ici, mais la congruence modulo quatre du motif élémentaire, conduit au calcul du déterminant de la matrice :

$$X = \begin{pmatrix} A & b' & 0 & b \\ b & A & b' & 0 \\ 0 & b & A' & b' \\ b' & 0 & b & A' \end{pmatrix} \quad \text{où}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+Z_1 e^{ik} & -1 & -1 \\ -1-Z_1 e^{-ik} & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A' = A$  en changeant  $Z_1$  en  $Z_3$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_2 e^{ih} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_2 e^{-ih} & 0 \end{pmatrix}$$

Introduisons les matrices

$$b = A^{-1}b \quad b_2 = A^{-1}b' \quad b_3 = A'^{-1}b \quad b_4 = A'^{-1}b'$$

$$\det X = (\det A)^2 (\det A')^2 \det(X')$$

$$\text{avec } X' = \begin{pmatrix} I & b_2 & 0 & b_1 \\ b_1 & I & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & I & b_4 \\ b_4 & 0 & b_3 & I \end{pmatrix}$$

$$\det X' = \det X'' \text{ avec } X'' = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & I-b_1b_2 & b_2 & -b_1^2 \\ 0 & b_3 & I & b_4 \\ b_4 & b_4b_2 & b_3 & I-b_4b_1 \end{pmatrix}$$

$$\det X'' = \det X''' \text{ avec } X''' = \begin{pmatrix} I - b_1b_2 - b_2b_3 & -b_1^2 - b_2b_4 \\ -b_4b_2 - b_3^2 & I - b_4b_1 - b_3b_4 \end{pmatrix}$$

En reprenant les notations du paragraphe A) :

$$A^{-1}b = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & yu \\ 0 & tu \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc tous les } b_i \text{ sont de la forme } \begin{pmatrix} 0 & \bullet \\ 0 & B_i \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de voir que :

$$\det X''' = \det X^{(IV)} \text{ avec } X^{(IV)} = \begin{pmatrix} I & -B_1B_2 - B_2B_3 & -B_1 - B_2B_4 \\ -B_4B_2 & -B_3 & I - B_4B_1 - B_3B_4 \end{pmatrix}$$

$$t = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & -p \end{pmatrix} \quad (\text{mêmes notations qu'au paragraphe précédent (A)})$$

Il faut calculer  $\det(X^{(IV)})$  avec

$$X^{(IV)} = \begin{pmatrix} 1 - qq'Z_2^2 & -pqZ_2^2 & -p^2Z_2^2e^{2ih} & -p'qZ_2^2e^{-2ih} \\ -pq'Z_2^2 & 1 - q^2Z_2^2 & -pqZ_2^2e^{2ih} & -pp'Z_2^2e^{-2ih} \\ -p'^2Ze^{2ih} & -pq'Z_2^2e^{-2ih} & 1 - qq'Z_2^2 & -p'q'Z_2^2 \\ -p'q'Z_2^2e^{2ih} & -pp'Z_2^2e^{-2ih} & -qp'Z_2^2 & 1 - q'^2Z_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si l'on pose : } D = (-1+Z_1e^{ik})(1-Z_1e^{-ik})$$

$$D' = (-1-Z_3e^{ik})(1+Z_3e^{-ik})$$

$$\alpha = 2iZ_1 \sin K$$

$$\beta = 1 - Z_1^2$$

et si l'on se restreint à  $Z_1 = Z_3$  et l'on développe ce déterminant en fonction des mineurs d'ordre 2

On obtient finalement

$$\det X = D^2 D'^2 - \alpha^2 Z_2^2 (D-D')^2 + 2Z_2^4 \alpha^4 + 2\alpha^2 Z_2^4 (D^2 + D'^2) - Z_2^6 (D-D')^2 \alpha^2 + (DD')^2 Z_2^8 - 2Z_2^4 \beta^4 \cdot \cos 4h \quad (1)$$

Pour  $k = h = 0$ , on trouve après simplifications  $(1-Z_1^2)^4 (1-Z_2^4)^2$

$$\frac{1}{N} \ln Z \sim \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dh dK \ln(\det X(h, K))$$

L'annulation de (1) détermine la température critique.

Dans ce paragraphe (B), on a rendu compte de ce calcul d'une part pour montrer les techniques employées pour obtenir la fonction de partition et d'autre part, pour montrer comment le caractère fastidieux de ces calculs peut croître très rapidement avec la grandeur du motif de base. On possède bien sûr toutes les informations nécessaires sur le problème mais l'investissement en temps est beaucoup trop important : la "physique" du problème, elle, pouvant être obtenue assez rapidement par d'autres méthodes : (en supposant que le comportement critique se situe à  $q = 0$  ou  $\pi$ ) en calculant un Pfaffien (fin de paragraphe A)) ; en calculant une énergie d'interface.

## APPENDICE N°8

### FONCTIONS DE CORRELATIONS

#### DES MODELES PERIODIQUES

Nous avons vu la relation existant entre l'énergie d'interface et la fonction de corrélation du modèle dual :

$$\sigma = -\beta \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \ln \langle \sigma_0 \sigma_l \rangle^*$$

(où  $r$  est la distance entre le spin 0 et le spin 1).

Au dessus de la température critique :

$$\langle \sigma_{0,0} \sigma_{M,N} \rangle \sim \frac{f_+(\theta)}{r^{1/2}} \cdot e^{-r/\xi^+(\theta)}$$

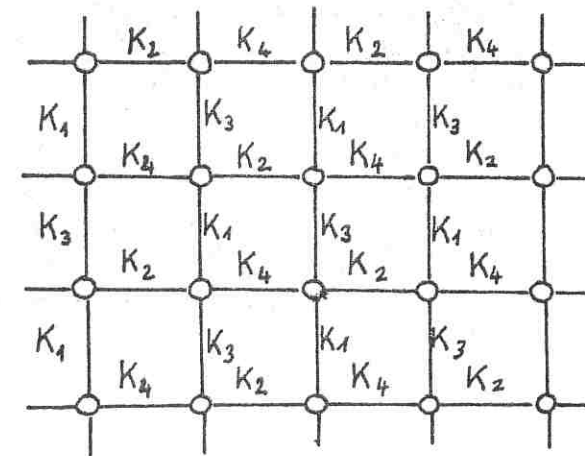
avec  $r$  la distance entre  $(0,0)$  et  $(M,N)$  ;  $\text{tg } \theta = \frac{M}{N}$

Au dessus de la température critique :

$$\langle \sigma_{0,0} \sigma_{M,N} \rangle \sim M^2 + \frac{f_-(\theta)}{r^2} \cdot e^{-r/\xi_-(\theta)}$$

$\xi^+$  est la longueur de corrélation usuelle

H.S. Green a étudié (89) un modèle qui est connu dans la littérature sous le nom de modèle rectangulaire généralisé :





Le modèle en bretelle que nous avons étudié est un cas particulier (à un changement de Mattis près) de ce modèle général (prendre  $Z_2 = Z_4 > 0$ ,  $Z_1 > 0$ ,  $Z_3 > 0$ ).

Les fonctions de corrélations sont obtenues comme le déterminant de la matrice de Toeplitz :

$$T_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta) e^{-i(n-m)\theta} d\theta \quad (I)$$

$$\text{avec } \phi(\theta) = \left[ \frac{(1 - Be^{i\theta})(1 - Ae^{-i\theta})}{(1 - Be^{-i\theta})(1 - Ae^{i\theta})} \right]^{1/2} \quad (II)$$

avec A et B déterminés par  $F(1+AB) = S_1 C_2 C_3 C_4 + S_3 C_1 (S_2 + S_4)$

$$F(A+B) = C_1 (1 - S_2 S_4)$$

$$F(A-B) = 1 + S_2 S_4$$

(avec  $S = \text{sh} 2K$  ;  $C = \text{ch} 2K$  ; il faut éliminer F).

La transition de ces modèles est obtenue pour  $A = 1$ .

Pour  $A = 1$ , il est facile (Mac Coy, p. 261) de voir que la fonction de corrélation :

$$\langle \sigma_{0,0} \sigma_{0,N} \rangle \text{ décroît comme } N^{-1/4}$$

Pour  $A > 1$ , on obtient une décroissance exponentielle  $\langle \sigma_{0,0} \sigma_{0,N} \rangle \sim A^{-N}$  ;

avec les notations introduites précédemment  $\xi^+(\theta) = \ln A = 1/\sigma$

On peut montrer que  $\xi^-(\theta) = -2 \ln A$ .

Tous ces résultats demeurent valables du moment que l'on obtient une fonction de corrélation déterminé par un  $\phi(\theta)$  du type (II) ce qui semble (conjecture de Potts (90)) être le cas pour tous les modèles d'Ising périodiques (frustrés ou non).

Le modèle étudié par Vaks et al (54) était bien de ce type.

Un problème peut se produire si  $A = B = 1$  (on aurait alors  $\sigma_{0,0} \sigma_{0,N} = 1$  quelque soit N).

En fait dans le cas du modèle rectangulaire généralisé, ceci ne peut se produire qu'à  $T = 0$ .

Si l'on regarde le modèle de Villain ( $Z_1 = -Z_3$ ,  $Z_2 = Z_4$ )

$$\frac{\ln Z}{N} = \ln(2 \text{ch} 2K) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi d\theta d\psi \ln \left[ (1 + Z^2)^2 - 2Z^2 \cos \theta - 2Z^2 \cos \psi \right].$$

On a l'impression qu'à  $T = 0$ , une non analytité se produit ; en fait, si l'on prend l'expression  $\frac{\ln Z}{N} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{2} (C_1^2 + C_2^2 - S_1^2 \cos 2\psi - S_2^2 \cos 2\theta) d\theta d\psi$

l'argument du logarithme est minimum pour  $C_1^2 + C_2^2 - S_1^2 - S_2^2 = 2$

(quelque soit la température !).  $T = 0$  n'est donc pas une température critique, ce qui est confirmé par le calcul de A lorsque  $T=0$ . A  $T = 0$  strictement, il y a des problèmes dans l'application du théorème de Szegös.

On peut donc conjecturer que les comportements des fonctions de corrélations des modèles périodiques frustrés sont en décroissance exponentielle, à l'exception de la (ou des) température critique où l'on a une loi de puissance  $N^{1/4}$ . Il semble sans espoir de voir apparaître d'autres comportements dus à l'effet de frustration.

#### REFERENCES

- (89) H.S. Green, Z. Phys. 171 129 (1963).
- (90) R.B. Potts, Phys. Rev. 88 352 (1952).
- (91) R.B. Potts, Proc. Camb. Phil. Soc. 48, part 1, 106 (1952).

DUALITE DANS LES MILIEUX DESORDONNES

$$A) \text{ Soit } Z = \sum_{\{S\}} e^{\sum_{ij} J_{ij} S_i S_j} \quad (S_i = \pm 1)$$

$$\text{Posons } \lambda_{ij} = S_i S_j$$

$$Z = \sum_{\{\lambda\}} e^{\sum_{ij} J_{ij} \lambda_{ij}} \prod_{\alpha} (1 + \lambda_{ij(\alpha)} \lambda_{jk(\alpha)} \lambda_{k(\alpha)} \lambda_{li(\alpha)})$$

où  $\alpha$  indexe une plaquette et  $\lambda_{ij(\alpha)} \dots$  les quatre (dans le cas d'un réseau carré) liaisons appartenant à une plaquette. Le deuxième terme impose que le produit soit égal à 1. (On peut montrer que cela est équivalent à ce que  $\lambda_{ij}$  s'écrive comme un produit dyadique  $S_i S_j$  avec  $S = \pm 1$ ). Ce deuxième terme peut s'écrire :

$$\sum_{\{\mu_{\alpha}\}} g(\lambda_{ij(\alpha)}, \mu_{\alpha}) \dots g(\lambda_{li(\alpha)}, \mu_{\alpha}) \text{ il suffit de poser } g(\lambda, 1) = 1$$

$$g(\lambda, -1) = \lambda \text{ qui s'inverse en } g(1, \mu) = 1, \quad g(-1, \mu) = \mu$$

d'où  $\langle ij \rangle$  et  $\langle \alpha \beta \rangle$  sont des liaisons duales).

Si l'on somme d'abord sur les  $\mu$  on trouve :

$$Z = \sum_{\{\mu\}} \prod_{\langle ij \rangle} (e^{J_{ij}} + e^{-J_{ij}} \mu_{\alpha} \mu_{\beta})$$

Si  $J_{ij}$  est positif, on peut toujours réécrire ces termes sous la forme  $X_{\alpha\beta} e^{K_{\alpha\beta} \mu_{\alpha} \mu_{\beta}}$  avec  $e^{-2K_{\alpha\beta}} = \text{th} J_{ij}$ .

Si  $J_{ij}$  est négatif, ce terme s'écrit  $X_{\alpha\beta \cdot \mu_{\alpha} \cdot \mu_{\beta}} e^{K_{\alpha\beta \cdot \mu_{\alpha} \cdot \mu_{\beta}}}$  avec

$$e^{-2K_{\alpha\beta}} = \text{th} |J_{ij}|.$$

Nous voyons que dans ce dernier cas, on peut écrire le résultat sans la forme

$$\sum_{\{\mu\} \langle \alpha \beta \rangle} \pi \quad (\text{th} |J_{ij}|)^{-1/2 (\mu_{\alpha} \mu_{\beta} - 1)} \cdot \text{sg}(J_{ij})^{-1/2 (\mu_{\alpha} - 1) - 1/2 (\mu_{\beta} - 1)}$$

Si l'on appelle  $\phi_{\alpha}$  le produit des signes des  $J_{ij}$  entourant la plaquette  $\alpha$  (variable de frustration), on peut voir (appendice n° 1 C) que cette expression est égale à

$$\sum_{\{\mu\} \langle \alpha \beta \rangle} \pi \quad (\text{th} |J_{ij}|)^{-1/2 (\mu_{\alpha} \mu_{\beta} - 1)} \pi_{\alpha}^{\phi_{\alpha}} \quad -1/2 (\mu_{\alpha} - 1)$$

Si maintenant, on considère une fonction de Green contenant les deux points  $S_i$  et  $S_j$  alors le terme :

$$e^{J_{ij} \lambda_{ij}} g(\lambda_{ij}, \mu_{\alpha}) g(\lambda_{ij}, \mu_{\beta}) \text{ devient } \lambda_{ij} \cdot e^{J_{ij} \lambda_{ij}} g(\lambda_{ij}, \mu_{\alpha}) g(\lambda_{ij}, \mu_{\beta})$$

La sommation sur  $\lambda_{ij}$  donne alors un terme  $e^{J_{ij}} - e^{-J_{ij} \mu_{\alpha} \mu_{\beta}}$

On voit donc qu'au lieu d'avoir  $k_{\alpha\beta} = -1/2 \ln \text{th} |J_{ij}|$ ,

$$k_{\alpha\beta} = + \frac{1}{2} \ln \text{th} |J_{ij}| < 0$$

Nous avons vu qu'une liaison négative engendrait par dualité des points d'une fonction de Green, nous venons de montrer la réciproque.

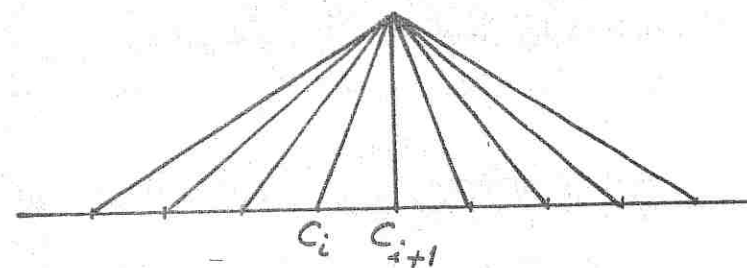


Figure 72

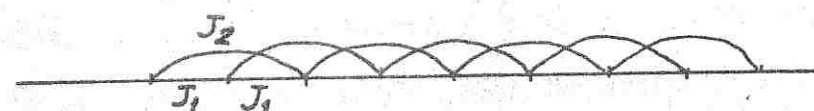


Figure 73

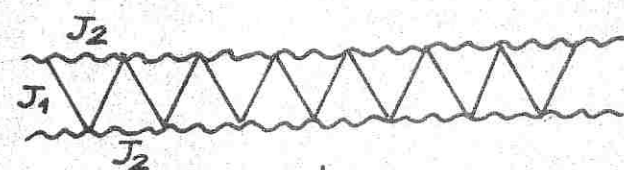
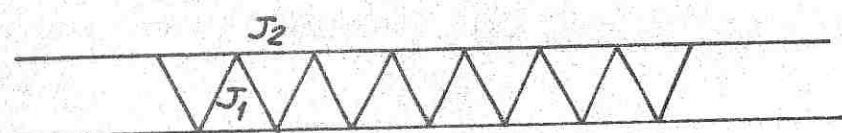
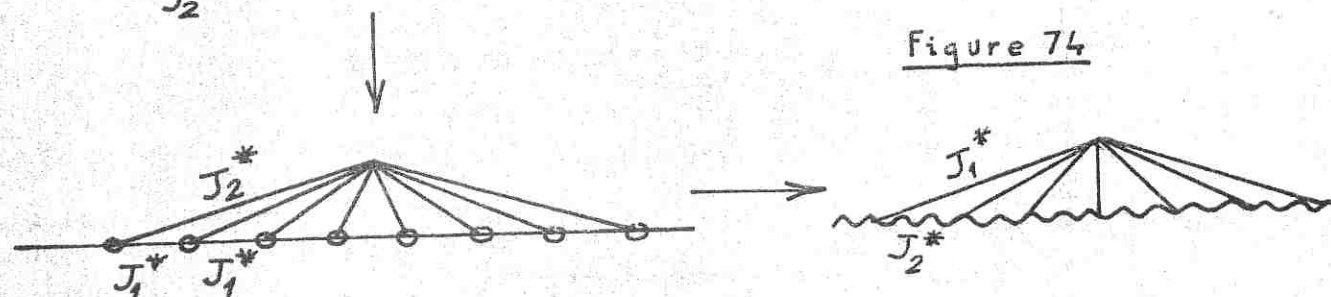
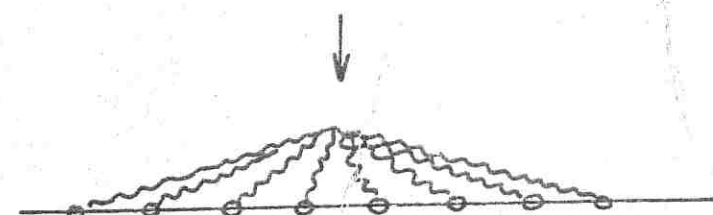
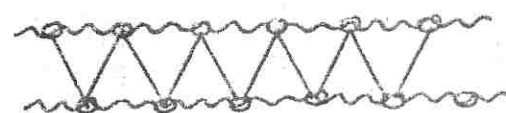


Figure 74



~~~~~ : liaisons négatives

o : point d'une fonction de Green.



B) Il est possible de définir une dualité géométrique sur des modèles en dimension un,

1) Prenons le cas d'Ising en champ (fig 72).

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{J \sum_{ij} S_i S_{i+1} + B \sum_i S_i}$$

Autorisons le champ au lieu d'être fixé à devenir lui aussi une variable dynamique :

$$Z' = \sum_{\{S\}} \sum_{\{\lambda\}} e^{J \sum_{ij} S_i S_{i+1} + B \sum_i S_i}$$

(S est un spin d'Ising).

Il est facile de voir que $Z' = 2Z$. Nous raisonnerons donc maintenant sur Z' . Introduisons $\lambda_i = S_i S_{i+1}$, $\Lambda_i = S_i S_i$

$$Z' = \sum_{\{\lambda, \Lambda\}} \prod_i \left[e^{J \lambda_i + B \Lambda_i} \cdot g(\mu_i, \Lambda_i) g(\mu_i, \Lambda_{i+1}) g(\mu_i, \lambda_i) \right]$$

Si l'on effectue d'abord la sommation sur les λ, Λ on obtient

$$\sum_{\{\mu\}} e^{J^* \sum_i \mu_i + B^* \sum_i \mu_i \mu_{i+1}}$$

Ce problème est donc self dual mais la température T^* qui est telle que $\text{sh} 2B^* \text{sh} 2J^* = 1$ n'est pas pour autant une température de transition.

2) Considérons le modèle d'Ising unidimensionnel avec interaction K_1 entre plus proches voisins et K_2 seconds voisins (voir fig 73).

Effectuons la même transformation de dualité : on obtient

$$Z = \sum_{\{\mu\}} \prod_i e^{J_2^* \mu_i + J_1^* \mu_i \mu_{i+1}}$$

Ce modèle s'envoie donc par dualité sur une chaîne de spins d'Ising dans un champ. Or, celui-ci nous l'avons vu est self dual. Nous en

concluons que le modèle d'Ising avec interaction entre premiers et seconds voisins est self dual.

Si maintenant, nous permettons à ces liaisons (K_2) d'être anti-ferromagnétiques, nous avons les dualités symbolisées par la fig 74 . (Les liaisons ondulées sont les liaisons négatives). On peut démontrer que $\langle S_i S_j \rangle$ (pour le modèle 2) = $\langle \mu_i \mu_{i+1} \dots \mu_j \rangle$ (pour le modèle 1). (modèle antiferromagnétique dans un champ).

Il a, par ailleurs, été démontré récemment que la fonction de corrélation $\langle S_i S_j \rangle$ pour le modèle 2 (modèle d'Ising unidimensionnel avec $K_2 < 0$ et $K_1 > 0$) présente un changement de comportement pour une certaine température ⁽⁹²⁾: une décroissance exponentielle en fonction de la distance entre les 2 spins, fait place à un régime oscillant. La dualité exprimée ci-dessus entraîne une singularité du même type pour $\langle \mu_i \mu_{i+1} \dots \mu_j \rangle$ dans le modèle antiferromagnétique en champ.

REFERENCES

(92) J. Swendsen, Phys. Rev. B 15, 5442 (1977).

(93) H.A. Kramers and G.H. Wannier, Phys. Rev. 60, (1941).

UNE RELATION ORIGINALE A PROPOS

DE LA METHODE DES REPLIQUES

Considérons le moment d'ordre n pour une distribution symétrique en pic delta centrés aux valeurs J

$$\langle Z^n \rangle_{x=1/2} = \int \prod_{ij} dJ_{ij} \sum_{\{S^1 \dots S^n\}} e^{J_{ij} (S_i^1 S_j^1 + S_i^2 S_j^2 + \dots + S_i^n S_j^n)} P(\{J_{ij}\})$$

Effectuons d'abord l'intégration par rapport aux J_{ij}

$$\langle Z^n \rangle_{x=1/2} = \sum_{\{S^1 \dots S^n\}} \pi_{\langle ij \rangle} \left[\frac{e^{J(S_i^1 S_j^1 + \dots + S_i^n S_j^n)}}{2} + \frac{e^{-J(S_i^1 S_j^1 + \dots + S_i^n S_j^n)}}{2} \right]$$

Effectuons une transformation de dualité ; nous obtenons

$$\langle Z^n \rangle_{x=1/2} = \sum_{\{\mu^1, \dots, \mu^n\}} \pi_{\langle ij \rangle} (e^{J^* (\mu_\alpha^1 \mu_\beta^1 + \dots + \mu_\alpha^n \mu_\beta^n)} \frac{1 + \mu_\alpha^1 \mu_\beta^1 \mu_\alpha^2 \mu_\beta^2 \dots \mu_\alpha^n \mu_\beta^n}{2})$$

($\alpha\beta$ liaison duale de la liaison ij)

Le terme après l'exponentielle est un projecteur qui impose que

$$\mu_\alpha^1 \mu_\alpha^2 \dots \mu_\alpha^n \mu_\beta^1 \mu_\beta^2 \dots \mu_\beta^n = \text{constante pour tout le réseau soit } \epsilon \in \{-1, +1\}$$

On peut par exemple exprimer μ_α^n comme $\epsilon \mu_\alpha^1 \mu_\alpha^2 \dots \mu_\alpha^{n-1}$

$$\langle Z^n \rangle_{x=1/2} = \sum_{\{\mu^1, \dots, \mu^{n-1}\}} \pi_{\langle \alpha\beta \rangle} e^{J^* (\mu_\alpha^1 \mu_\beta^1 + \dots + \mu_\alpha^{n-1} \mu_\beta^{n-1} + \mu_\alpha^1 \mu_\alpha^2 \dots \mu_\alpha^{n-1} \mu_\beta^1 \dots \mu_\beta^{n-1})}$$

Calculons maintenant le moment d'ordre n par une probabilité x d'avoir

-J et 1-x d'avoir +J.

$$\langle Z^n \rangle_x = \sum_{\{\mu^1, \dots, \mu^n\}} \pi_{\langle ij \rangle} (e^{J^* (\mu_\alpha^1 \mu_\beta^1 + \dots + \mu_\alpha^n \mu_\beta^n)} ((1-x) + x \mu_\alpha^1 \mu_\alpha^2 \dots \mu_\alpha^n \mu_\beta^1 \dots \mu_\beta^n))$$

Si $x < 1/2$, on peut exponentier le dernier terme et l'on a alors

$$\langle Z^n \rangle_x \sim \sum_{\{\mu^1 \dots \mu^n\}} \pi e^{J^* (\mu_\alpha^1 \mu_\beta^1 \dots \mu_\alpha^n \mu_\beta^n) + \alpha (\mu_\alpha^1 \mu_\alpha^2 \dots \mu_\alpha^n \mu_\beta^1 \dots \mu_\beta^n)}$$

avec $th = \frac{x}{1-x}$. Si l'on impose la relation entre la température et concentration : $th J^* = e^{-2J} = \frac{x}{1-x}$

On voit que l'on obtient la relation :

$$\frac{\langle Z^n \rangle_x(T)}{x=1/2} = (chJ)^N \langle Z^{n-1} \rangle_x(T)$$

N étant le nombre de liaisons.

ERRATA

Page 6 sur la figure 3 au lieu de Aimantation rémanente, lire aimantation thermorémanente.

Page 12 avant dernière ligne, lire $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial \mu(w) x$.

Page 14 ligne 15 au lieu de $\frac{\partial \ln E}{\partial \mu} = X(I)$ lire $\frac{\partial \ln E}{\partial \mu} = x$ (I)

Page 16 ligne 7, lire au même titre que les C_I .

Page 19 ligne 3, lire au lieu de KaC^V , où n ... lire ... KaC^V , qui consiste à écrire

$$\log Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^{n-1}}{n}, \text{ où } n \dots$$

Page 19 ligne 18 lire au lieu de avec tout autre spin dans le cas pur et dans
lire avec tout autre spin, dans le cas pur ce modèle donne le champ moyen.

Page 38 ligne 16 lire due à un ensemble simple de configuration.

Page 39 ligne 1 lire au lieu de par la fig. 12, lire par la fig. 24

Page 45 ligne 11 lire "de voir que $\zeta = \gamma_0$ "

Page 46 $(a_o^+ - a_o) (b_o^+ + b_o)$ au lieu de $(a^+ - a) (b^+ + b)$

Figure 37 et 38 $K_5 = K'_1$, $K_7 = K'_3$, $K_6 = K'_2$, $K_8 = K'_4$

Page 50 ligne 11 au lieu de l'énergie est donc $N(2K_1) + \sum_{\{n\}} e^{-H}$, lire l'énergie libre est donc $N2K_1 + \ln \sum_{\{n\}} e^{-H}$

Page 51 ligne 7 celui de la figure 42

ligne 9 au lieu de Z_Λ lire Z_1

ligne 17 au lieu de "on appelle N la somme ..." lire "on appelle $\sum_N$ la somme ..."

Page 52 au lieu de un autre formation, lire une autre formulation.

Page 55 les n° des figures sont décalés 45 au lieu de 44

| | | | | |
|----|---|---|---|----|
| 46 | " | " | " | 45 |
| 47 | " | " | " | 46 |
| 48 | " | " | " | 47 |

Page 58 ligne 12 $P(|Heff|)$ au lieu de $P(Heff)$.

Figure 60 Echantillon de L. De Sèze.

Figure en face de la figure 61 : Paquet de spin solidaires dans les états correspondant au fond d'une vallée.

Page 66 ligne 4 : est un résultat mal connu.

Page 67 ligne 8 : lire au lieu de "les n plaquettes formant lire les n plaquettes frustrées.

ligne 12, lire (en haut et en bas...)

Page 68 ligne 13, lire au lieu de "à celle sous les deux ..." lire à celle sans les deux

ligne 17 Si $K_1 > K_2$ on aura $K_1^* > K_2^*$...

Page 79 il y a deux page 79, les indexations d'appendice sont à décaler d'un .

Page 82 ligne 3 : ζ est un spin d'Ising ; α indexe les répliques...

Page 84 les spins sont des spins d'Ising

Page 86 ligne 12 au lieu de $Z_2(1)$ lire $Z_2(M-1)$

Page 88 ligne 3 L'hamiltonien est : le T.H = $-\sum_I \dots$

Page 90 r entier avec $r+1 > \frac{2}{\alpha} > r$