

Travaux Pratiques : Modèle de Black-Scholes

Le but de ce TP sur ordinateur est de comparer la formule de Black-Scholes à des données financières réelles.

1 La formule de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes permet d'évaluer une option européenne sous certaines conditions en fonction de la date de maturité T , du prix d'exercice K , de la valeur de l'actif sous-jacent S à l'instant t et de sa volatilité σ , ainsi que du taux d'intérêt sans risque r . En utilisant les conditions aux limites (à maturité pour $t = T$), on a respectivement pour une option d'achat ("call") et une option de vente ("put") :

$$C(S, T) = \max(0, S - K) \quad \text{et} \quad P(S, T) = \max(0, K - S),$$

on obtient :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{1}$$

$$P(S, t) = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2), \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_2 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \end{aligned}$$

et

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} [1 + erf(\frac{x}{\sqrt{2}})],$$

où $N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite (la probabilité qu'une variable gaussienne soit inférieure à x) et erf est la fonction erreur. Pour calculer l'intégrale $N(x)$ on pourra utiliser un logiciel (gnuplot par exemple) pour lequel la fonction erreur est définie.

2 Applications

2.1 Un exemple simple pour se familiariser

Commencer par tester la formule de Black-Scholes (1) pour une option d'achat dans un cas simple : $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$.

▷ **2-1** Tracer $C(S, t)$ en fonction de S pour différentes durées à maturité $T - t = 1, 10, 100$ jours.

▷ **2-2** Modifier la valeur de la volatilité σ (par exemple $\sigma = 0.6$) et étudier son effet sur C et sur le coefficient "Delta" défini par :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1).$$

2.2 Données financières réelles

Considérons un actif financier (par exemple l'action Renault étudiée au TP2).

- ▷ **2-3** Calculer sa volatilité σ sur une période choisie.

Se connecter sur la page web “options” ou “warrants”¹ associés à cet actif. Ces produits dérivés sont classés par valeur de prix d'exercice K (Attention, il y a un facteur 1/10 dans la cotation) et de date de maturité T .

- ▷ **2-4** Utiliser ces données (K et T) pour une call et comparer à la valeur obtenue par la formule de Black-Scholes. Tester la sensibilité à la variable σ . Conclusions.

1. Les Warrants sont des produits dérivés analogues aux options, sauf qu'ils sont exclusivement émis par des banques et que leur vente à découvert n'est pas possible.