

# Travaux Pratiques : Modèle de Black-Scholes

Le but de ce TP sur ordinateur est de comparer la formule de Black-Scholes à des données financières réelles.

## 1 La formule de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes permet d'évaluer une option européenne sous certaines conditions en fonction de la date de maturité  $T$ , du prix d'exercice  $K$ , de la valeur de l'actif sous-jacent  $S$  à l'instant  $t$  et de sa volatilité  $\sigma$ , ainsi que du taux d'intérêt sans risque  $r$ . En utilisant les conditions aux limites (à maturité pour  $t = T$ ), on a respectivement pour une option d'achat ("call") et une option de vente ("put") :

$$C(S, T) = \max(0, S - K) \quad \text{et} \quad P(S, T) = \max(0, K - S),$$

on obtient :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (1)$$

$$P(S, t) = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2), \quad (2)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

et

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

où  $N(x)$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite (la probabilité qu'une variable gaussienne soit inférieure à  $x$ ) et  $\operatorname{erf}$  est la fonction erreur. Pour calculer l'intégrale  $N(x)$  on pourra utiliser un logiciel (gnuplot par exemple) pour lequel la fonction erreur est définie.

## 2 Applications

### 2.1 Un exemple simple pour se familiariser

Commencer par tester la formule de Black-Scholes (1) pour une option d'achat dans un cas simple :  $K = 50$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.3$ .

▷ **2-1** Tracer  $C(S, t)$  en fonction de  $S$  pour différentes durées à maturité  $T - t = 1, 10, 100$  jours.

▷ **2-2** Modifier la valeur de la volatilité  $\sigma$  (par exemple  $\sigma = 0.6$ ) et étudier son effet sur  $C$  et sur le coefficient "Delta" défini par :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1).$$

## 2.2 Données financières réelles

Considérons un actif financier (par exemple l'action Renault étudiée au TP2).

▷ **2-3** Calculer sa volatilité  $\sigma$  sur une période choisie.

Se connecter sur la page web “options” ou “warrants”<sup>1</sup> associés à cet actif. Ces produits dérivés sont classés par valeur de prix d'exercice  $K$  (Attention, il y a un facteur 1/10 dans la cotation) et de date de maturité  $T$ .

▷ **2-4** Utiliser ces données ( $K$  et  $T$ ) pour une call et comparer à la valeur obtenue par la formule de Black-Scholes. Tester la sensibilité à la variable  $\sigma$ . Conclusions.

---

1. Les Warrants sont des produits dérivés analogues aux options, sauf qu'ils sont exclusivement émis par des banques et que leur vente à découvert n'est pas possible.