

TD 4 : Théorie de Bogoliubov de la superfluidité

On considère un gaz de bosons à température nulle ($\beta \rightarrow \infty$) décrit par l'action

$$S[\psi^*, \psi] = \int_0^\beta d\tau \int d^d r \left\{ \psi^*(\mathbf{r}, \tau) \left(\partial_\tau - \mu - \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi(\mathbf{r}, \tau) + \frac{g}{2} \psi^*(\mathbf{r}, \tau) \psi^*(\mathbf{r}, \tau) \psi(\mathbf{r}, \tau) \psi(\mathbf{r}, \tau) \right\}, \quad (1)$$

où on suppose une coupure Λ agissant sur les impulsions ($|\mathbf{k}| \leq \Lambda$).

1) Spectre d'excitation.

1.1) Que vaut l'action S dans une approximation de point selle où le champ $\psi(\mathbf{r}, \tau) = \psi_0$ est supposé uniforme et indépendant du temps? A quelle condition a-t-on $\psi_0 \neq 0$? Quelle est alors la symétrie spontanément brisée? Pourquoi peut-on choisir ψ_0 réel dans perte de généralité?

1.2) On considère maintenant les fluctuations $\psi'(\mathbf{r}, \tau) = \psi(\mathbf{r}, \tau) - \psi_0$ du champ autour de sa valeur de point selle ψ_0 . Que vaut l'action $S[\psi'^*, \psi']$ à l'ordre quadratique en ψ' ?

1.3) On introduit le champ à deux composantes

$$\Psi(\mathbf{k}, i\omega_n) = \begin{pmatrix} \psi'(\mathbf{k}, i\omega_n) \\ \psi'^*(-\mathbf{k}, -i\omega_n) \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger(\mathbf{k}, i\omega_n) = (\psi'^*(\mathbf{k}, i\omega_n), \psi'(-\mathbf{k}, -i\omega_n)), \quad (2)$$

où

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{k}, i\omega_n) &= \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \int_0^\beta d\tau \int d^d r e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_n \tau)} \psi'(\mathbf{r}, \tau), \\ \psi'^*(\mathbf{k}, i\omega_n) &= \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \int_0^\beta d\tau \int d^d r e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_n \tau)} \psi'^*(\mathbf{r}, \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Montrer qu'on peut écrire l'action sous la forme

$$S = S_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \omega_n} \Psi^\dagger(\mathbf{k}, i\omega_n) \mathcal{D}(\mathbf{k}, i\omega_n) \Psi(\mathbf{k}, i\omega_n), \quad (4)$$

où S_0 est la valeur au point selle et $\mathcal{D}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ une matrice 2×2 . En déduire le spectre d'excitation dans la phase superfluide ($\psi_0 \neq 0$). Est-il en accord avec le théorème de Goldstone?

2) Potentiel thermodynamique et équation d'état.

2.1) En utilisant le résultat (10), montrer que le potentiel thermodynamique s'écrit

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2\beta} \sum_{\mathbf{k}, \omega_n} \ln \det \mathcal{D}(\mathbf{k}, i\omega_n), \quad (5)$$

où Ω_0 est la contribution du point selle. La somme sur les fréquences de Matsubara est divergente et on doit en fait considérer

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2\beta} \sum_{\mathbf{k}, \omega_n} \left[\ln \mathcal{D}_{11}(\mathbf{k}, i\omega_n) e^{i\omega_n 0^+} + \ln \mathcal{D}_{22}(\mathbf{k}, i\omega_n) e^{-i\omega_n 0^+} + \ln \left(1 - \frac{\mathcal{D}_{12}(\mathbf{k}, i\omega_n)^2}{\mathcal{D}_{11}(\mathbf{k}, i\omega_n) \mathcal{D}_{22}(\mathbf{k}, i\omega_n)} \right) \right]. \quad (6)$$

Pouvez-vous justifier cette expression (cf. TD 2) ?

2.2) En vous aidant des résultats (11), exprimer le potentiel thermodynamique Ω en fonction du potentiel chimique μ (on ne cherchera pas à faire les sommes sur $\mathbf{k}$). En déduire la densité de particules n .

2.3) On rappelle que pour une interaction de contact, la longueur de diffusion a dans l'onde s est déterminée par l'équation (voir page 3)

$$\frac{m}{4\pi a} = \frac{1}{g} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (7)$$

À l'aide des résultats (12), exprimer n en fonction de μ et a . En déduire l'équation d'état du gaz $\mu(n)$ dans la limite $na^3 \ll 1$.

3) Densité du condensat. La densité de particules peut s'écrire

$$n = n_0 + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \langle \psi'_{\mathbf{k}} {}^* \psi'_{\mathbf{k}} \rangle, \quad (8)$$

où n_0 est la densité de particules dans le condensat.

3.1) Exprimer $n'_{\mathbf{k}} = \langle \psi'_{\mathbf{k}} {}^* \psi'_{\mathbf{k}} \rangle$ en fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ et en déduire

$$n'_{\mathbf{k}} = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}} + \mu}{E_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2}. \quad (9)$$

3.2) En utilisant (12), déterminer la densité du condensat n_0 dans la limite $na^3 \ll 1$.

4) Démontrer les équations (11) et (12).

Formulaire mathématique

$$\int \mathcal{D}[\psi^*, \psi] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dx dy (\psi^*(x), \psi(x)) A(x, y) \begin{pmatrix} \psi(y) \\ \psi^*(y) \end{pmatrix} \right\} = (\det A)^{-1/2}, \quad (10)$$

où $x = (\mathbf{r}, \tau)$, $\int dx = \int_0^\beta d\tau \int d^d r$, etc.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \ln(-i\omega_n + a) e^{i\omega_n 0^+} &= 0 \quad \text{pour } a > 0, T = 0, \\ \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \ln \left(\frac{\omega^2 + a^2}{\omega^2 + b^2} \right) &= a - b \quad \text{pour } a < b, T = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) &= -\frac{2}{\pi^2} m^{3/2} \mu^{1/2}, \\ \int_{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}} + \mu}{E_{\mathbf{k}}} \right) &= -\frac{2}{3\pi^2} (m\mu)^{3/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

où $\int_{\mathbf{k}} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}$, $\epsilon_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2/2m$ et $E_{\mathbf{k}} = [\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}} + \mu)]^{1/2}$.

Longueur de diffusion dans l'onde s

Lorsque le potentiel d'interaction $g(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ entre particules a une symétrie sphérique, les collisions à deux particules ont lieu uniquement dans l'onde s à basse énergie. Dans le repère du centre de masse, un état stationnaire de diffusion s'écrit alors

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (13)$$

où $\mathbf{k}' = |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{r}}$ et

$$f_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \rightarrow \frac{-a}{1 + ika} \quad (k \rightarrow 0). \quad (14)$$

Les interactions à basse énergie sont donc entièrement paramétrées par la longueur de diffusion a . Celle-ci peut se calculer à partir de la matrice T ,

$$T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\mathbf{k}^2/m) = -\frac{4\pi}{m} f_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (15)$$

et de l'équation

$$T(\epsilon) = g + gG_0^+(\epsilon)T(\epsilon), \quad (16)$$

où $G_0^+(\epsilon) = (\epsilon + i0^+ - H_0)^{-1}$ (H_0 est l'énergie cinétique des 2 particules dans le repère du centre de masse). Pour un potentiel de contact $g(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r})$, $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\epsilon)$ ne dépend que de ϵ et on obtient

$$T(\epsilon) = g + g \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\epsilon + i0^+ - \mathbf{k}^2/m} T(\epsilon) \quad (17)$$

et par suite l'équation (7).