ENS Cachan - UPMC

L3-Phytem **Probabilités et statistiques**

Travaux Dirigés

1 Où il ne faut pas confondre corrélations et causalité

Commenter les affirmations suivantes :

▷ **1-1** Les compagnies d'assurance ont observé que plus de 80% des accidents de voiture se produisaient à moins de 30 km du domicile des conducteurs. On en a conclu que l'habitude du trajet impliquait un manque de vigilance.

▷ **1-2** Il a été prouvé que l'espérance de vie des personnes qui, à 60 ans, pratiquaient régulièrement le jogging, était significativement supérieure à la moyenne générale. Ce qui démontre le bénéfice de cette activité.

▷ **1-3** La preuve que les français n'aiment pas travailler : 40% des arrêts de travail ont lieu autour des week-ends.

2 Démographie machiste

▷ **2-1** Une famille a deux enfants dont un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

▷ **2-2** Une famille a deux enfants dont l'aîné est un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

▷ **2-3** On suppose que les couples cessent de faire des enfants dès qu'un garçon naît, sans limitation du nombre total d'enfants par couple. Y a-t-il une incidence sur le sexe ratio ?

3 Le jeu télévisé

Derrière l'une des trois portes fermées, il y a une voiture à gagner. Vous choisissez une porte. Le présentateur, qui sait où se cache la voiture, ouvre une des deux autres portes et vous constatez qu'elle ne cache pas de voiture. Vous avez alors la possibilité de changer votre choix de porte. Avez-vous intérêt à le faire ?

4 Les trois mousquetaires

Les trois mousquetaires (4 personnes donc) ont mélangé leurs bottes dans le couloir d'une auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend 2 bottes au hasard. Calculer la probabilité pour que [1] :

▷ **4-1** Les 2 bottes soient les siennes.

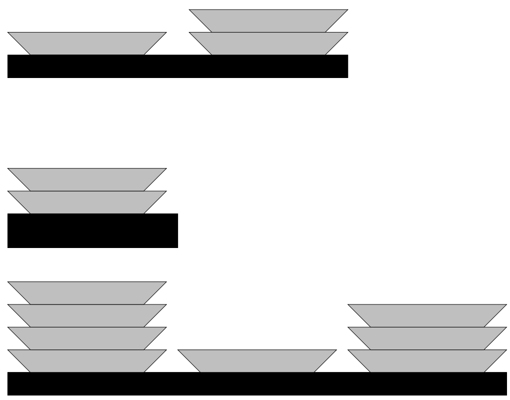
▷ **4-2** Les 2 bottes forment une paire.

▷ **4-3** Les 2 bottes soient deux pieds droits.

▷ **4-4** Les 2 bottes appartiennent à deux personnes différentes.

5 Les assiettes

En vous installant dans votre nouvel appartement, vous constatez que les r étagères de la cuisine ont des longueurs différentes. Et vous souhaitez y ranger vos N assiettes. Une étagère $i = 1, 2, ..., r$ a une longueur égale à g_i fois le diamètre d'une assiette. Il y a donc g_i emplacements par étagère. Et vous décidez de ranger N_i assiettes sur l'étagère i. On note Ω_i le nombre de façon de distribuer N_i assiettes sur les g_i emplacements de l'étagère i (sans prendre en compte l'ordre d'arrivée d'une assiette sur un emplacement).



▷ **5-1** Quelle est la relation entre les N_i et le nombre total d'assiettes N ?

Curieusement, vous vous intéressez au nombre de façons de placer vos assiettes sur les étagères. Supposons que les assiettes sont *discernables* (elles sont par exemple numérotées de 1 à N) et qu'à un emplacement donné sur une étagère vous pouvez en superposer autant que vous voulez.

▷ **5-2** Quel est le nombre de façons Ω_0 de choisir N_1 assiettes pour la première étagère, N_2 assiettes pour la deuxième étagère ... et N_r pour la dernière.

▷ **5-3** Quelle est l'expression de Ω_i ? En déduire le nombre total de façons de ranger les assiettes.

On suppose maintenant, que les assiettes sont *indiscernables.*

▷ **5-4** Que vaut Ω_0 ? Quelle est la nouvelle expression de Ω_i et le nombre total de façons de ranger les assiettes ?

▷ **5-5** Répondre à la question précédente si chaque emplacement ne peut recevoir qu'au plus une assiette.

1. Réponse : **4-1)** Il y a $\binom{8}{2} = 28$ combinaisons possibles donc $p = 1/28$; **4-2)** Il y a $4.4 = 16$ combinaisons possibles parmi 28 donc $p = 4/7$; **4-3)** Il y a $\binom{4}{2} = 6$ combinaisons possibles donc $p = 3/14$; **4-4)** Il y a 4 combinaisons telles que les 2 bottes appartiennent à la même personne donc $28 - 4$ telles qu'elles n'appartiennent pas à la même personne donc $p = 6/7$.

6 Où l'événement le plus improbable détermine la moyenne

Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre les valeurs 0 et 2 avec la même probabilité. [2]

▷ **6-1** Calculer $\langle X \rangle$ et σ_X^2.

▷ **6-2** Soit $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$ une autre variable aléatoire ; chaque x_i représente une réalisation (indépendante) de la variable X. Calculer $\langle Y \rangle$ et σ_Y^2.

7 L'urne

On considère une urne contenant 2 boules, une noire et une blanche. On tire au hasard une boule. Si elle est noire, on la replace et on rajoute une noire. Si elle est blanche, on la replace aussi et on rajoute une blanche. On tire à nouveau une boule au hasard sur les trois et on répète le processus. Soit X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de boules blanches au n-ième tirage. On veut calculer sa loi de distribution $P_n(k)$, c'est-à-dire la probabilité que $X_n = k$ au n-ième tirage.

▷ **7-1** Calculer $P_n(k)$ pour $n = 1$, 2 et 3.

▷ **7-2** Ayant deviné la loi, justifier votre intuition par un raisonnement par récurrence.

▷ **7-3** Calculer $\langle X_n \rangle$.

▷ **7-4** Calculer la variance de la distribution de X_n, puis celle de $X_n - Y_n$ où Y_n est la variable aléatoire "nombre de boules noires".

8 L'intégrale gaussienne

Soit l'intégrale gaussienne

$$I(n) = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx,$$

où $\alpha > 0$.

▷ **8-1** On souhaite calculer $I(0)$. Calculer J^2 où

$$J = \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx.$$

En déduire $I(0)$.

▷ **8-2** Calculer $I(1)$.

▷ **8-3** Exprimer $I(n)$ en fonction de $I(n-2)$. En déduire $I(2)$ et $I(3)$.

9 La fonction Gamma et la formule de Stirling

On définit la fonction Gamma pour $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

▷ **9-1** Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(1/2)$.

2. Réponse :**1-1)** $\langle X \rangle = 1$ et $\langle X^2 \rangle = 2$. Donc $\sigma_X^2 = 2 - 1 = 1$: **1-2)** La variable aléatoire Y est différente de 0 si tous les x_i valent 2 (avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$), donc $\langle Y \rangle = 1$, $\langle Y^2 \rangle = 2^n$ et $\sigma_Y^2 = 2^n - 1$.

▷ **9-2** Montrer que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En déduire $\Gamma(n+1)$, où n est un entier positif.

La formule de Stirling est une approximation très utile de $n!$ pour $n \gg 1$:

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \ .$$

▷ **9-3** Montrer à l'aide de la fonction Gamma que

$$n! = \int_0^\infty e^{-f(t)} dt,$$

où $f(t)$ est une fonction qui présente un minimum très marqué en t_0 pour n grand.

▷ **9-4** Méthode du col : Remplacer la fonction $f(t)$ par son développement de Taylor au deuxième ordre au voisinage de t_0 et montrer que

$$n! \simeq n^n e^{-n} \int_{-n}^\infty e^{-\frac{u^2}{2n}} du.$$

En déduire la formule de Stirling pour $n \gg 1$.