Système hors équilibre : Modèle ASEP

Références

[1] B. Derrida, E. Domany et D. Mukamel, *An Exact Solution of a One-Dimensional Asymmetric Exclusion Model with Open Boundaries*, J. Stat. Phys. **69** (1992), 667

La première version de ce TD a été rédigée par Cécile Appert.

Dans le cadre du modèle ASEP (Asymmetric Simple Exclusion Process), N particules se déplacent sur un réseau unidimensionnel de $L \geq N$ sites qui ne peuvent contenir qu'au plus une particule. Soit n_i le nombre d'occupation du site i qui vaut 1 si le site est occupé par une particule et 0 sinon.

Les particules ne peuvent se déplacer que vers la droite (modèle TASEP, "T" pour Totally) avec la dynamique suivante : On choisit un lien aléatoirement avec la probabilité par unité de temps $1/\tau$. Si le site de gauche est occupé par une particule et le site de droite est vide, alors on fait avancer la particule de gauche à droite.

1 Conditions aux limites périodiques

Dans un premier temps on considère le cas des conditions aux limites périodiques.

▷ **1-1** Écrire la valeur de $n_i(t + \Delta t)$ en fonction des $n_j(t)$, en distinguant les cas où le lien choisi est $(i-1, i)$, $(i, i+1)$, ou un autre lien. En déduire que l'équation donnant l'évolution de $\langle n_i(t)\rangle$, où $\langle \cdots \rangle$ dénote une moyenne d'ensemble s'écrit sous la forme :

$$\frac{d\langle n_i\rangle}{dt} = J_{i-1,i} - J_{i,i+1},$$

où $J_{i-1,i}$ et $J_{i,i+1}$ sont les flux moyens de particules de $i-1$ vers i et de i vers $i+1$ respectivement.

▷ **1-2** Montrer que l'équation pour $\langle n_i\rangle$ admet une solution champ moyen pour laquelle $\langle n_i\rangle = \rho$ quel que soit i (on négligera les corrélations : $\langle n_i n_j\rangle = \langle n_i\rangle\langle n_j\rangle$). Que vaut ρ ? Donner l'expression du flux moyen. Quelle symétrie vérifie le système ?

On peut également écrire l'équation maîtresse pour la probabilité $P(C)$ d'observer une configuration donnée $C = \{n_1, n_2, \cdots, n_N\}$:

$$\frac{dP(C)}{dt} = \sum_{C'} \Big(W(C' \to C)P(C') - W(C \to C')P(C) \Big). \tag{1}$$

▷ **1-3** On considère une configuration C dans laquelle il y a $n(C)$ amas de particules (i.e. des particules occupant des sites voisins). Quelle est la probabilité de quitter cette configuration pendant l'intervalle de temps dt ? Considérons maintenant les configurations C' qui peuvent donner la configuration C en déplaçant une seule particule. Combien y a-t-il de configurations C' ? A l'aide de l'équation maîtresse (1) montrer que l'équiprobabilité des configurations décrit un état stationnaire du système. Calculer cette probabilité.

▷ **1-4** En déduire $\langle n_i\rangle$ et $\langle n_i n_j\rangle$ dans l'état stationnaire par cette nouvelle méthode.

En général, les systèmes hors-équilibre dans l'état stationnaire ne vérifient pas la condition du bilan détaillé

$$W(C' \to C)P(C') = W(C \to C')P(C), \tag{2}$$

mais une condition plus faible (mais suffisante) :

$$\sum_{C'} W(C' \to C)P(C') = \sum_{C'} W(C \to C')P(C). \tag{3}$$

$\triangleright$ **1-5** Montrer que dans ce système la condition du bilan détaillé (2) n'est pas vérifiée.

2 Conditions aux limites ouvertes

À présent, les particules sont injectées dans le site d'entrée $i = 1$ (s'il est vide) avec la probabilité α par unité de temps et sortent du dernier site $i = L$ (s'il est occupé) avec la probabilité β par unité de temps.

$\triangleright$ **2-1** Que devient l'équation d'évolution de la question **1-1)** pour $\langle n_1 \rangle$ et $\langle n_L \rangle$?

$\triangleright$ **2-2** Chercher une condition sur les valeurs de α et β pour que les équations admettent une solution stationnaire champ moyen, avec $\langle n_i \rangle = \rho$ pour tout i.

Pour compléter cette étude, on cherche une solution stationnaire champ moyen, en négligeant les corrélations entre sites, mais qui n'est pas nécessairement invariante par translation ($\langle n_i \rangle$ dépend du site i a priori).

$\triangleright$ **2-3** Trouver une relation de récurrence entre les valeurs successives de $\langle n_i \rangle$ (on pourra faire intervenir le flux J). Tracer graphiquement cette relation de récurrence et montrer qu'il y a plusieurs scénarios possibles. Montrer en particulier qu'il n'y a pas de solution physique si le flux est plus grand que $1/4\tau$.