Marche aléatoire sur réseau

Références

[1] C. Itzykson et J.M. Drouffe, *Théorie statistique des champs 1* (Interéditions-CNRS, 1989), chapitre 1.

Nous allons étudier le mouvement brownien d'une particule dans le cadre d'une marche au hasard sur un réseau. Pour cela, on considère une particule qui se déplace aléatoirement de site en site sur un réseau cubique à d dimensions à intervalle de temps régulier $\Delta t = 1$. On cherche à déterminer la probabilité conditionnelle $P(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)$ de trouver la particule au point $\mathbf{x}$ à l'instant t sachant qu'elle se trouvait en $\mathbf{x}_0$ à l'instant t_0.

1 Équation de la diffusion

▷ **1-1** En introduisant la version discrétisée de l'opérateur laplacien Δ_r

$$\Delta_r f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2d}\sum_{\mu=1}^{d}[f(\mathbf{x}+\mathbf{e}_\mu) + f(\mathbf{x}-\mathbf{e}_\mu) - 2f(\mathbf{x})],$$

où les $\mathbf{e}_\mu$ sont les d vecteurs de translation unitaires et orthogonaux entre eux, montrer que la distribution vérifie l'équation de la diffusion

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_r)P(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0) = 0. \tag{1}$$

▷ **1-2** Résoudre l'équation (1) en utilisant la transformation de Fourier sur réseau

$$P(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}}\tilde{P}(\mathbf{k}, t).$$

2 Retour à l'origine

On définit $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$ le temps moyen passé par la particule en un point $\mathbf{x}$ (nombre de passages) sachant qu'elle se trouvait initialement en $\mathbf{x}_0$ et $\Pi(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$ la probabilité d'atteindre $\mathbf{x}$ *au moins une fois* au départ de $\mathbf{x}_0$ *après* une marche aléatoire.

▷ **2-1** Exprimer $G(\mathbf{x}_0|\mathbf{x}_0)$ en fonction de $\Pi(\mathbf{x}_0|\mathbf{x}_0)$.

▷ **2-2** Trouver une relation entre $\Pi(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$, $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$ et $G(\mathbf{x}_0|\mathbf{x}_0)$, puis entre $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$ et $P(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)$.

▷ **2-3** En déduire explicitement $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$ et montrer que $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$ vérifie l'équation

$$\Delta_r G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = -\delta_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0}$$

où δ_{x,x_0} est le symbole de Kronecker à d dimensions.

▷ **2-4** Discuter - selon la valeur de la dimension de l'espace - de la définition de $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$. Montrer que la quantité $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) - G(\mathbf{x}_0|\mathbf{x}_0)$ reste toujours finie.

▷ **2-5** En déduire le comportement de $\Pi(\mathbf{x}_0|\mathbf{x}_0)$, la probabilité de retour à l'origine, selon la dimension de l'espace.