Analyse en taille finie pour les transitions de phases continues

Références

[1] R. Kenna, D.A. Johnston, and W. Janke, Phys. Rev. Lett. **97** (2006), 155702

1 Exposants critiques en champ moyen

Dans l'approximation du champ moyen, l'aimantation par site, m, du modèle d'Ising est donnée par l'équation auto-cohérente :

$$m = \tanh\big(\beta(B + Jmq)\big),$$

où B est le champ magnétique, $J > 0$ l'interaction ferromagnétique entre spins plus proches voisins et q la coordinence du réseau. La résolution graphique de cette équation montre que la température critique est donnée par $T_c = qJ/k$.

▷ **1-1** En étudiant le comportement de m au voisinage du point critique ($T \simeq T_c$ et $B = 0$) montrer que

$$m \sim (T_c - T)^{\beta},$$

où β est un exposant que l'on déterminera.

▷ **1-2** Déterminer de la même façon l'exposant γ donnant le comportement de la susceptibilité χ au voisinage du point critique :

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}.$$

2 Analyse en taille finie

▷ **2-1** Donner les lois d'échelle, pour un système infini, de la chaleur spécifique $C(t)$, de la longueur de corrélation $\xi(t)$ et de la susceptibilité $\chi(t)$ en fonction des exposants critiques usuels α, ν, γ et de la température réduite $t = \frac{T-T_c}{T_c}$, où T_c est la température critique

▷ **2-2** Dans une simulation, expliquer pourquoi on n'observe pas de véritables divergences des grandeurs précédemment introduites. Quel est le comportement de $\xi(t)$ en fonction de la taille L du système au point critique ?

Dans le cadre d'une hypothèse d'analyse en taille finie, on a la relation

$$\frac{C_L(0)}{C(t)} = F_C\left(\frac{\xi_L(0)}{\xi(t)}\right), \tag{1}$$

où F_C est une fonction d'échelle, $C_L(0)$ la valeur de la chaleur spécifique maximale obtenue par une simulation pour un système de dimension linéaire L.

▷ **2-3** En supposant que le rapport $\frac{\xi_L(0)}{\xi(t)}$ est fini et indépendant de L, déduire que $t \sim L^x$, où x est un exposant que l'on déterminera.

▷ **2-4** Montrer alors que

$$C_L(0) \sim L^y,$$

où y est un exposant que l'on déterminera.

▷ **2-5** En supposant que

$$\frac{\chi_L(0)}{\chi(t)} = F_\chi\left(\frac{\xi_L(0)}{\xi(t)}\right), \tag{2}$$

où F_χ est une fonction d'échelle, montrer que

$$\chi_L(0) \sim L^z,$$

où z est un exposant que l'on déterminera.

3 Corrections logarithmiques

Il existe de nombreuses situations physiques pour lesquelles les lois d'échelle précédentes doivent être modifiées pour tenir compte des corrections logarithmiques. La suite du problème consiste à établir des relations entre des exposants associés à ces corrections. On suppose maintenant que pour un système de taille infinie

$$C(t) \sim |t|^{-\alpha}|\ln|t||^{\hat{\alpha}} \tag{3}$$

$$\xi(t) \sim |t|^{-\nu}|\ln|t||^{\hat{\nu}} \tag{4}$$

$$\chi(t) \sim |t|^{-\gamma}|\ln|t||^{\hat{\gamma}}. \tag{5}$$

▷ **3-1** En supposant que $\xi_L(0) \sim L(\ln L)^{\hat{q}}$ et que l'hypothèse de l'analyse en taille finie pour la chaleur spécifique, Eq (1) est correcte, montrer que

$$C_L(0) \sim L^y(\ln L)^{\hat{y}},$$

où $\hat{y}$ est un exposant que l'on déterminera.

Une analyse en taille finie de la fonction de partition (dont le détail dépasse le cadre de ce problème) montre que si $\alpha \neq 0$, la chaleur spécifique d'un système de taille finie se comporte comme

$$C_L(0) \sim L^{-d+\frac{2}{\nu}}(\ln L)^{-2\frac{\hat{\nu}-\hat{q}}{\nu}}.$$

▷ **3-2** En déduire la relation d'hyperscaling et une relation entre $\hat{\alpha}$, $\hat{q}$, $\hat{\nu}$, et d.

Dans le cas où $\alpha = 0$, la chaleur spécifique d'un système de taille finie se comporte comme

$$C_L(0) \sim (\ln L)^{1-2\frac{\hat{\nu}-\hat{q}}{\nu}}.$$

▷ **3-3** Que devient alors la relation entre $\hat{\alpha}$, $\hat{q}$, $\hat{\nu}$, et d.