

TD 1 : Grands nombres et espace des phases

1 Pile ou face

Carla dispose d'un grand nombre N de pièces de monnaie identiques pour lesquelles la probabilité de tomber du côté pile vaut p et du côté face $q = 1 - p$. Elle les jette en l'air.

- ▷ **1-1** Quelle est la probabilité $P_N(k)$ de trouver k pièces tombées du côté pile. Vérifier la normalisation de la distribution de probabilité.
- ▷ **1-2** Calculer la valeur moyenne du nombre de pièces tombées du côté pile et l'écart quadratique moyen.

2 Inspirations

Chacune de nos inspirations contient quelques molécules du dernier souffle de Jules César. Évaluer le nombre de molécules en question. Après réflexion (quantique) que dire de cette affirmation ?

3 Formule de Stirling

On veut démontrer la formule de Stirling, valable pour $N \gg 1$

$$N! \simeq N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}, \quad (1)$$

via la méthode dite "du col". Pour ce faire, on utilise la représentation intégrale de la factorielle :

$$N! = \Gamma(N + 1) = \int_0^\infty e^{-t} t^N dt. \quad (2)$$

- ▷ **3-1** Comment se comporte la fonction $e^{-t} t^N$ pour $N \gg 1$? Écrire $N!$ sous la forme :

$$N! = \int_0^\infty e^{-f(t)} dt, \quad (3)$$

où $f(t)$ est une fonction présentant un minimum en un point t_0 que l'on précisera.

- ▷ **3-2** Déterminer une approximation de $f(t)$ au voisinage de son minimum. En déduire l'approximation (1) de $N!$. Est-elle correcte pour $N = 10, 100, 10^{23}$?

4 Fluctuations de densité

Dans des conditions normales de température et de pression, un récipient de volume $V = 22,4$ litres contient N particules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne. Soit k le nombre de particules contenues dans un sous-volume $v = 1 \text{ mm}^3$ du récipient.

- ▷ **4-1** Calculer le nombre moyen $\langle k \rangle$ de particules et les fluctuations autour de cette valeur ?
- ▷ **4-2** On se place à la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$ tels que la densité N/V est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de k se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de $\langle k \rangle$ (on posera $k = \langle k \rangle + s$ avec $s \ll N$). Ce résultat est-il surprenant ?

5 Dynamique dans l'espace des phases

Une balle de masse m est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h .

- ▷ **5-1** Donner le Hamiltonien de ce système. Écrire et intégrer les équations de Hamilton.
- ▷ **5-2** En supposant que la balle rebondit élastiquement sur le sol, dessiner le portrait de phase correspondant (trajectoire dans l'espace des phases).

Des particules identiques, de masse m et sans interactions entre elles, se déplacent verticalement dans le champ de pesanteur g . À $t = 0$ leurs points représentatifs dans l'espace des phases se trouvent dans un rectangle dont les quatre sommets ont pour coordonnées $A(q_A, p_A)$, $B(q_A + \Delta q, p_A)$, $C(q_A + \Delta q, p_A + \Delta p)$ et $D(q_A, p_A + \Delta p)$.

- ▷ **5-3** Calculer les coordonnées des points A' , B' et C' et D' représentant, à l'instant t , les particules qui se trouvaient initialement aux points A , B , C et D . Calculer les aires des domaines $ABCD$ et $A'B'C'D'$. Conclusion?

6 Volume de l'hypersphère

Le but de cet exercice est de calculer le volume V_D d'une hypersphère de rayon R dans un espace à D dimensions. Un argument dimensionnel permet d'écrire $V_D = C_D R^D$, où C_D est le volume de l'hypersphère de rayon $R = 1$.

- ▷ **6-1** En déduire l'expression de la surface S_D de l'hypersphère de rayon R .
- ▷ **6-2** Représenter $V(r) = r^D$, où $0 \leq r \leq 1$, pour $D = 1, 2, 10$ et 100 . Soit une hypersphère de rayon R et de densité massique uniforme ρ . Montrer que la masse de l'enveloppe de surface S_D et d'épaisseur $dR \ll R$ est du même ordre de grandeur que la masse totale de l'hypersphère lorsque D est grand ($D \sim 10^{23}$).

Reste à calculer la constante C_D .

- ▷ **6-3** Donner la valeur de l'intégrale gaussienne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. En déduire la valeur de $I_D = \prod_{i=1}^D \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2} dx_i \right)$.

- ▷ **6-4** Effectuer le changement de variables $\sum_{i=1}^D x_i^2 = R^2$ et $\prod_{i=1}^D dx_i = dV_D$ et montrer que

$$I_D = \frac{D}{2} C_D \int_0^{+\infty} y^{D/2-1} e^{-y} dy . \quad (4)$$

- ▷ **6-5** En utilisant la représentation intégrale de la factorielle, donnée par l'équation (2), en déduire que

$$C_D = \frac{\pi^{D/2}}{\left(\frac{D}{2}\right)!} . \quad (5)$$

Vérifier ce résultat pour $D = 1, 2$ et 3 , sachant que $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.