M2 MSA
2013/2014

Du mouvement brownien à la modélisation financière
TD n° 1

Corrigé partiel du TD1 :Le mouvement brownien : Einstein et Langevin

1 Le mouvement brownien selon Einstein

Corrigé en cours.

2 Équation de Langevin et corrélation des vitesses

▷ **2-1** On a

$$x(t) = \int_0^t v(t')dt',$$

donc

$$< x^2 > (t) =< \int_0^t v(t')dt' \int_0^t v(t'')dt'' >= \int_0^t dt' \int_0^t dt'' < v(t')v(t'') > .$$

▷ **2-2** Comme à l'équilibre $< v^2(0) >=< v^2(s) >= K(0)$:

$$< (v(0) \pm v(s))^2 >=< v^2(0) > + < v^2(s) > \pm 2 < v(0)v(s) >= 2K(0) \pm 2K(s) \geq 0,$$

donc $|K(s)| \leq K(0)$. Par ailleurs, en choisissant $t_1 = t - s$

$$K(s) =< v(t)v(t+s) >=< v(t_1)v(t_1+s) >=< v(t-s)v(t) >= K(-s).$$

Lorsque $s \to \infty$ (en fait pour des temps longs devant γ^{-1}), les vitesses $v(0)$ et $v(s)$ sont décorrelées et la moyenne du produit tend vers 0.

▷ **2-3** Avec le changement de variables : $s = t'' - t'$ on a

$$< x^2 > (t) = \int_0^t dt' \int_{-t'}^{t-t'} ds < v(0)v(s) > .$$

Or $0 \leq t' \leq t$ et $-t' \leq s \leq t - t'$ donc $-t \leq s \leq t$.
donc

$$\begin{aligned} < x^2 > (t) &= \int_{-t}^0 ds \int_{-s}^t dt' K(s) + \int_0^t ds \int_0^{t-s} dt' K(s) \\ &= \int_{-t}^0 ds\, (t+s)K(s) + \int_0^t ds\, (t-s)K(s) \\ &= 2\int_0^t ds\, (t-s)K(s), \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement de variables $s \to -s$ dans la première intégrale.

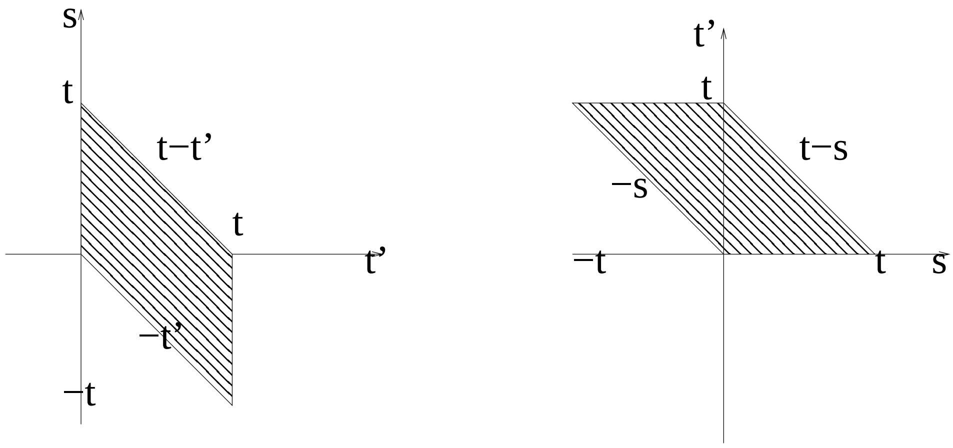

FIGURE 1 – Changement de variables du plan $t' - s$ au plan $s - t'$

▷ **2-4** L'équation de Langevin s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \frac{1}{m}\eta.$$

Intégrons entre s et $s + ds$ où $ds << \gamma^{-1}$:

$$\int_s^{s+ds} dt' \, \frac{dv}{dt'} = -\gamma \int_s^{s+ds} v(t')dt' + \frac{1}{m}\int_s^{s+ds} \eta(t')dt',$$

donc

$$v(s+ds) - v(s) = -\gamma v(s)ds + \frac{1}{m}\int_s^{s+ds} \eta(t')dt',$$

car $v(t)$ varie peu entre s et $s + ds$. En multipliant enfin par $v(0)$ et en prenant la moyenne d'ensemble :

$$< v(0)v(s+ds) > - < v(0)v(s) >= -\gamma < v(0)v(s) > ds + \frac{1}{m}\int_s^{s+ds} < v(0)\eta(t') > dt'.$$

La force aléatoire étant statistiquement indépentante de la vitesse initiale, le dernier terme vaut 0 :

$$\frac{d\langle v(0)v(s)\rangle}{ds} = -\gamma \langle v(0)v(s)\rangle.$$

Donc

$$K(s) = K(0)e^{-\gamma s},$$

pour $s \geq 0$ et comme $K(-s) = K(s)$ et $K(0) =< v^2(0) >= kT/m$ (équipartition de l'énergie) :

$$K(s) = \frac{kT}{m}e^{-\gamma|s|}$$

pour tout s.

▷ **2-5** Finalement,

$$\begin{aligned}
< x^2 > (t) &= \frac{2kT}{m}\int_0^t ds \, (t-s)e^{-\gamma s} \\
&= \frac{2kT}{m}(t + \frac{\partial}{\partial\gamma})\int_0^t ds \, e^{-\gamma s} \\
&= \frac{2kT}{m}(t + \frac{\partial}{\partial\gamma})[\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}] \\
&= \frac{2kT}{m}\left(t\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} + \frac{t\gamma e^{-\gamma t} - 1 + e^{-\gamma t}}{\gamma^2}\right) \\
&= \frac{2kT}{\gamma m}\left(t - \frac{1}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\right).
\end{aligned}$$