Réf: chapitre 16 du livre de B.A. Bernevig et T.L. Hughes

1) Intro

On va étudier la supraconductivité topologique.

La supraconductivité : certains métaux deviennent supra à basse T.

↳ 2 propriétés : 1) résistance nulle (K. Onnes 1911)

2) diamagnétisme parfait, expulsion totale du chp magnétique (effet Meissner 1933)

Théorie microscopique de la supra : Bardeen, Cooper et Schrieffer 1957. Appariement des électrons en paires de Cooper à cause d'une interaction attractive médiée par les vibrations du réseau (les phonons). La paire de Cooper a une fonction d'onde qui est

~~Plus tard on a découvert des supras non-~~

de type $\underbrace{\text{onde s (pour la partie orbitale)}}_{\ell=0 \text{ symétrique ds l'échange des 2 électrons}}$ et $\underbrace{\text{singulet de spin (i.e. } \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}})}_{\text{antisym. ds l'échange des 2 él.}}$

La fct d'onde totale de la paire doit être antisymétrique car il s'agit de 2 fermions.

Grossièrement : paire de Cooper ≃ boson chargé (charge $= -2e < 0$, masse $= 2m$)

supra ≃ condensation de BE de ces bosons } fonction d'onde macroscopique

≃ superfluidité ms chargée } $\psi(\vec{r},t) \propto \Delta(\vec{r},t)$

Excitation du supra : ↗ modes collectifs du condensat ($|\Delta|$ et θ), bosons ↘ quasiparticules (bogolons), paires cassées, fermions

Plus tard, on a découvert de la supra non-conventionnelle i.e. pas onde s/singulet.

Par exemple : onde d/singulet ($\ell=2$). pour les cuprates (supras à hte T_c)

onde p/triplet ($\ell=1$) pour l' ^3He superfluide, Sr_2RuO_4 (ruthénates), ...

↑ $|\uparrow\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\downarrow\rangle$ ou $(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$

On pense aussi qu'il peut y avoir un mécanisme d'appariement purement électronique (i.e. sans les phonons). E.g. Kohn et Luttinger : écrantage de l'interact° de Coulomb ⇒ interact° effective avec oscillations de Friedel (type RKKY) dont le signe change.

Quid du mécanisme RVB d'Anderson ?

On va se concentrer sur la supra (2D) onde p/triplet et chirale i.e. qui brise la symétrie TR. On parle de supra $p_x + i p_y$. On va voir en quoi elle est "topologique". C'est l'équivalent supra de l'isolant de Chern.

ex: supra 2D $p_x + i p_y$: - $Sr_2 Ru O_4$ - Fu-Kane recipe = surface supra d'un isolant topo 3D fort (STI)
- film d' ^3He superfluide de la phase A (Volovik)
- FQHE à $\nu = \frac{5}{2}$ (Moore - Read)

Tableau périodique "10-fold way" : classe D à 2D → classificat° topologique par un $\mathbb{Z}$ (nb de Chern).
à 1D → $\mathbb{Z}_2$ (chaîne de Majorana)

2) Théorie champ moyen de la supra BCS : formalisme de Bogoliubov - de Gennes (BdG)

(p. 193-196)

$$H = \sum_{\vec p, s} c^+_{\vec p s} \underbrace{\left(\frac{\vec p^{\,2}}{2m} - \mu\right)}_{\equiv \varepsilon_0(\vec p)} c_{\vec p, s}$$

Hamiltonien gd canonique $= H_{tm} - \mu N$

$s = \uparrow, \downarrow$

$\{c_{\vec p, s}, c^+_{\vec p' s'}\} = \delta_{\vec p, \vec p'} \delta_{s, s'}$

$\{c_{\vec p s}, c_{\vec p' s'}\} = 0$ (pas trivial !)

$c^+_{\vec p s} \neq c_{\vec p s}$ fermions complexes

$$c^+_{\vec p s} c_{\vec p s} = \frac{1}{2} c^+_{ps} c_{ps} + \frac{1}{2} c^+_{ps} c_{ps} = \frac{1}{2} c^+ c - \frac{1}{2} c c^+ + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} \sum_{\vec p, s} \left(c^+_{ps} \varepsilon_0(\vec p) c_{ps} - c_{ps} \varepsilon_0(\vec p) c^+_{ps} \right) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{p, s} \varepsilon_0(\vec p)}_{\underbrace{\sum_{\vec p} \varepsilon_0(\vec p) = cte \ (\infty)}_{\text{on oublie}}}$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec p, s} \left(c^+_{ps} \varepsilon_0(p) c_{ps} - c_{-ps} \varepsilon_0(-p) c^+_{-ps} \right)$$

$$H = \sum_{p} \underbrace{\left(c^+_{p\uparrow} \ c^+_{p\downarrow} \ c_{-p\uparrow} \ c_{-p\downarrow} \right)}_{\equiv \psi^+_p} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|cc} \varepsilon_0(p) & 0 & & \\ 0 & \varepsilon_0(p) & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & -\varepsilon_0(-p) & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -\varepsilon_0(-p) \end{array} \right)}_{\equiv H_{BdG}(p)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_{p\uparrow} \\ c_{p\downarrow} \\ c^+_{-p\uparrow} \\ c^+_{-p\downarrow} \end{pmatrix}}_{\equiv \psi_p}$$

Hamiltonien en 2nde quantif.

spineur de Nambu

$\sim$ Hamiltonien en 1ère quantif.

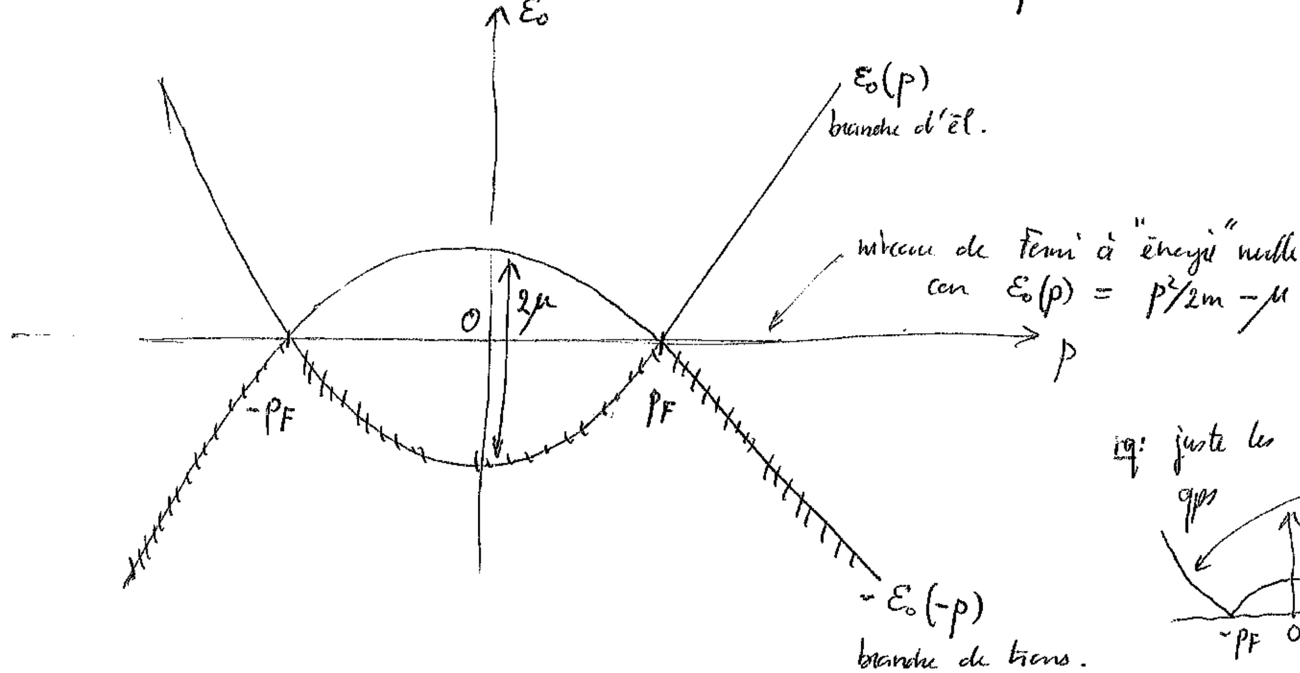
$\sim$ Hamiltonien de Bloch.

Formalisme redondant, doublage artificiel des ddl. On a l'impression d'une structure 4x4 alors qu'au départ, à chaque $\vec{p}$ il n'y a que $s = \uparrow, \downarrow$ i.e. 2x2. Ici le spineur de Nambu :

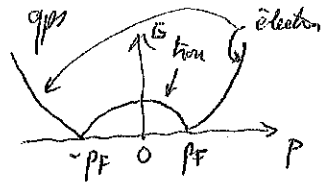
$$\psi_p \equiv \begin{pmatrix} c_{p\uparrow} \\ c_{p\downarrow} \\ c^+_{-p\uparrow} \\ c_{-p\downarrow} \end{pmatrix}$$

annihilation électron spin ↑, impulsion $\vec{p}$
——— ↓ ———
——— trou ——— ↓, ———
——— ↑, ———

car annihilation trou spin ↓ et impulsion $\vec{p}$
= création électron spin ↑ ——— $-\vec{p}$



rq: juste les excitations de



Doublage car on somme sur $\vec{p}$ et sur $-\vec{p}$ et donc $c^+_{-\vec{p}\uparrow}$ apparaît à la fois comme trou ds $\psi_{\vec{p}}$ et comme électron ds $\psi_{-\vec{p}}$.

Symétrie particule-trou (artificielle) :

$$H_{BdG}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{E}_0(p) & 0 \\ \hline 0 & -\mathcal{E}_0(-p) \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{el} \\ \text{trou} \end{array} \longrightarrow \underbrace{\tau_x}_{\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)} K\, H_{BdG}(-p) K \tau_x$$

$$= \tau_x \left(\begin{array}{c|c} \overset{=\mathcal{E}_0(-p)}{\mathcal{E}_0(-p)^*} & 0 \\ \hline 0 & -\mathcal{E}_0(+p)^* \end{array}\right) \tau_x$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} -\mathcal{E}_0(p) & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{E}_0(p) \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{E}_0(p) & 0 \\ \hline 0 & -\mathcal{E}_0(-p) \end{array}\right) = -H_{BdG}(p)$$

On retient $$\boxed{\tau_x \underbrace{K\, H_{BdG}(-p)\, K}_{H_{BdG}(-p)^*} \tau_x \overset{?}{=} -H_{BdG}(p)}$$

Attraction entre électrons + traitement champ moyen $\Rightarrow$

$$H_\Delta = \sum_{\vec{p}} \Big(\Delta\, c^\dagger_{p\uparrow} c^\dagger_{-p\downarrow} + \Delta^*\, c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} \Big)$$

"pairing potential"
appariement entre $\vec{p},\uparrow$ et $-\vec{p},\downarrow$
(ici onde s)

$\Delta \in \mathbb{C}$ $\quad$ Δ ~~[illegible]~~ est $\propto$ au paramètre d'ordre supra

Hamiltonien quadratique, fermions sans interact°
mais ne conserve plus le nb de fermions complexes mais uniquement la parité (on peut créer ou annihiler 2 électrons à la fois : $c^\dagger c^\dagger$ et cc pas uniquement $c^\dagger c$ ou $cc^\dagger$). Symétrie de jauge $\mathbb{Z}_2$ et plus $U(1)$. Charge conservée modulo 2.

$$H_{tot} = H + H_\Delta = \sum_{\vec{p}} \Big[\tfrac{1}{2} \Big(c^\dagger_{p\uparrow} \varepsilon_0(p) c_{p\uparrow} + c^\dagger_{p\downarrow} \varepsilon_0(p) c_{p\downarrow} - c_{-p\uparrow} \varepsilon_0(-p) c^\dagger_{-p\uparrow} - c_{-p\downarrow} \varepsilon_0(-p) c^\dagger_{-p\downarrow} \Big)$$
$$+ \Delta\, c^\dagger_{p\uparrow} c^\dagger_{-p\downarrow} + \Delta^* c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} \Big]$$

$\to \frac{1}{2}\Delta c^\dagger_{p\uparrow} c^\dagger_{-p\downarrow} - \frac{1}{2}\Delta c^\dagger_{-p\downarrow} c^\dagger_{p\uparrow}$

$$= \sum_{\vec{p}} \psi^\dagger_{\vec{p}}\ \frac{1}{2} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} \varepsilon_0(p) & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & \varepsilon_0(p) & -\Delta & 0 \\ \hline 0 & -\Delta^* & -\varepsilon_0(-p) & 0 \\ \Delta^* & 0 & 0 & -\varepsilon_0(-p) \end{array}\right)}_{\equiv H_{BdG}(p)} \psi_p$$

$\to$ terme de couplage e- trou

check : $c^\dagger_{p\uparrow}\left[\varepsilon_0(p) c_{p\uparrow} + \Delta c^\dagger_{-p\downarrow} \right] = \varepsilon_0(p) c^\dagger_{p\uparrow} c_{p\uparrow} + \Delta c^\dagger_{p\uparrow} c^\dagger_{-p\downarrow}$ ok.

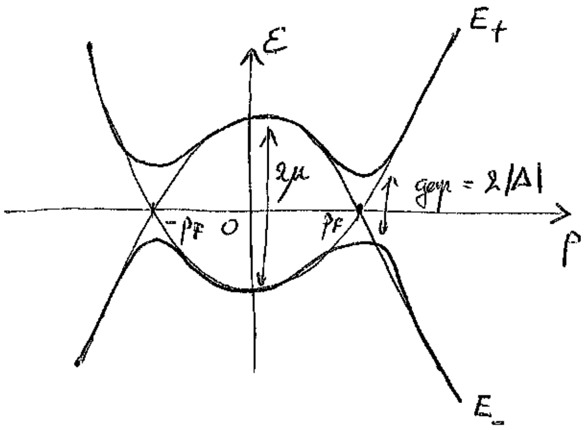
$$H_{BdG}(p) = \varepsilon_0(p)\, \tau_z s_0 - \underbrace{\mathrm{Re}\,\Delta}_{\Delta_R}\, \tau_y s_y - \underbrace{\mathrm{Im}\,\Delta}_{\Delta_I}\, \tau_x s_y \qquad \text{car} \quad \varepsilon_0(-p) = \varepsilon_0(p)$$

$$\tau_z s_0 \to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \tau_y s_y \to \begin{pmatrix} & & & -i \\ & & i & \\ & -i & & \\ i & & & \end{pmatrix} \qquad \tau_x s_y \to \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$$

$$H_{BdG}(p)^2 = \varepsilon_0(p)^2 \underbrace{\tau_z^2}_{=1} + \Delta_R^2 \underbrace{\tau_y^2 s_y^2}_{=1} + \Delta_I^2 \underbrace{\tau_x^2 s_y^2}_{=1} \qquad \text{car} \quad \begin{aligned} \{\tau_z, \tau_y s_y\} &= 0 \\ \{\tau_z, \tau_x s_y\} &= 0 \\ \{\tau_y s_y, \tau_x s_y\} &= 0 \end{aligned}$$

$$= \left[\varepsilon_0(p)^2 + |\Delta|^2 \right] \mathbb{1}_4$$

$\Rightarrow$ spectre : $\quad E_\pm(p) = \pm \sqrt{\varepsilon_0(p)^2 + |\Delta|^2}$ $\quad$ (dég. double)



Il s'agit du spectre des excitations à 1 fermion complexe (on parle de bogolons). Ce sont des excitations qui mélangent un électron et 1 trou. Alors que dans un métal il y a soit des électrons, soit des trous. Le spectre est gappé (gap = $2|\Delta|$ en p_F) comme pour un isolant de bande mais avec une symétrie particule-trou.

Transf de Bogolubov :

$$H = \sum_{\vec{p}} \left(E_+(\vec{p})\, \gamma^+_{+,\vec{p},\uparrow}\, \gamma_{+,\vec{p},\uparrow} + E_-(\vec{p})\, \gamma^+_{-,\vec{p},\uparrow}\, \gamma_{-,\vec{p},\uparrow} \right)$$

où
$$\begin{cases} \gamma^+_{+,\vec{p},\uparrow} = \sin\alpha_p\, c^+_{p\uparrow} + \cos\alpha_p\, c_{-p\downarrow} \\ \gamma^+_{+\vec{p}\downarrow} = -\sin\alpha_p\, c^+_{p\downarrow} + \cos\alpha_p\, c_{p\uparrow} \\ \gamma^+_{-,p,\uparrow} = \sin\beta_p\, c^+_{p\uparrow} + \cos\beta_p\, c_{p\downarrow} \\ \gamma^+_{-,p,\downarrow} = -\sin\beta_p\, c^+_{p\downarrow} + \cos\beta_p\, c_{p\uparrow} \end{cases}$$

ici on a pris $\Delta = |\Delta| > 0$

où $\operatorname{tg}\alpha_p = \dfrac{\mathcal{E}_0(p) + E_+(p)}{|\Delta|}$ $\qquad \operatorname{tg}\beta_p = \dfrac{\mathcal{E}_0(p) + E_-(p)}{|\Delta|} = \dfrac{\mathcal{E}_0(p) - E_+(p)}{|\Delta|}$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{-,-p,\downarrow} &= -\sin\beta_{-p}\, c_{-p\downarrow} + \cos\beta_{-p}\, c^+_{p\uparrow} \\ &= \gamma^+_{+,p,\uparrow} \end{aligned}\right\} \text{redondance}$$

rq: pas loin de la condit° d'un fermion réel (Majorana) $\gamma = \gamma^+$

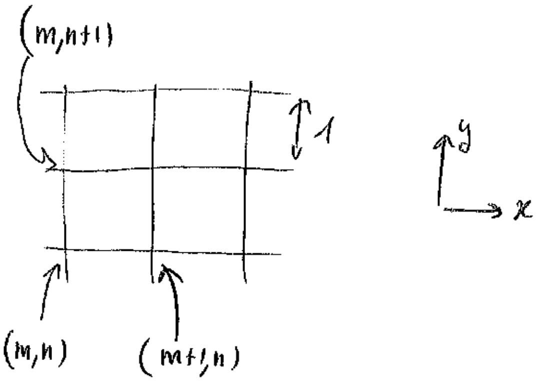
Dans l'état fondam, tous les états (à "1 particule") d'énergie <0 sont occupés et tous les autres sont vides. Vraiment similaire à un isolant de bande (avec une symétrie PH en plus).

rq: When $\mathcal{E}_0(p)$ is close to zero then bogolon $\sim$ 50% electron and 50% hole
qd $\mathcal{E}_0(p)$ est grand (e.g. $p \to 0$ ou $p \gg p_F$) bogolon $\sim$ trou ou bogolon $\sim$ électron

3) Super chirale onde p 2D (p. 201-206) [classe D dans 10-fold way, $d=2 \to \mathbb{Z}$]

On va se mettre sur réseau carré et considérer des électrons sans spin (ou polarisés de spin) :

$$H = \sum_{m,n} \Big\{ -t\left(c^{\dagger}_{m+1,n} c_{m,n} + c^{\dagger}_{m,n} c_{m+1,n}\right) - t\left(c^{\dagger}_{m,n+1} c_{m,n} + c^{\dagger}_{m,n} c_{m,n+1}\right)$$
$$- (\mu - 4t)\, c^{\dagger}_{m,n} c_{m,n}$$
$$+ \Delta\, c^{\dagger}_{m+1,n} c^{\dagger}_{m,n} + \Delta^{*} c_{m,n} c_{m+1,n}$$
$$+ e^{i\frac{\pi}{2}} \Delta\, c^{\dagger}_{m,n+1} c^{\dagger}_{m,n} + e^{-i\frac{\pi}{2}} \Delta^{*} c_{m,n} c_{m,n+1} \Big\}$$



$\vec{r} = m\,\vec{u}_x + n\,\vec{u}_y \qquad a \equiv 1$

super onde p car sorte de saut 1er voisin $\quad \Delta c_j^{\dagger} c_i \quad j \neq i$

chirale à cause de la phase $e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\{c_{m,n}, c^{\dagger}_{m',n'}\} = \delta_{m,m'}\delta_{n,n'}$

$\{c_{m,n}, c_{m',n'}\} = 0$

$c^{\dagger}_{m,n} \neq c_{m,n}$

$\varepsilon_0(\vec p) = -2t(\cos p_x + \cos p_y) - (\mu - 4t)$ $\qquad e^{i\pi/2}$

TF $\Rightarrow$
$$\boxed{H_{BdG}(\vec p) = \begin{pmatrix} \varepsilon_0(\vec p) & 2i\Delta(\sin p_x + i \sin p_y) \\ cc & -\varepsilon_0(-\vec p) \end{pmatrix} \quad 2\times 2}$$

Rq: si Δ est homogène, on peut résoudre par transformée de Fourier (TF)

démo: $\displaystyle c^{\dagger}_{m,n} = \frac{1}{A}\sum_{\vec k} e^{-i\vec k\cdot\vec r_{m,n}}\, c^{\dagger}_{\vec k}$ $\quad$ car $\displaystyle |\vec r\rangle = \sum_{\vec k} \underbrace{\langle \vec k|\vec r\rangle}_{=\frac{1}{A}e^{-i\vec k\cdot\vec r}} |\vec k\rangle$

a) $$\sum_{m,n} c^{\dagger}_{m,n} c_{m,n} = \frac{1}{A^2}\sum_{\vec k,\vec k'} \underbrace{\sum_{m,n} e^{i\vec k'\cdot\vec r - i\vec k\cdot\vec r}}_{A\,\delta_{\vec k,\vec k'}} c^{\dagger}_{\vec k} c_{\vec k'} = \frac{1}{A}\sum_{\vec k} c^{\dagger}_{\vec k} c_{\vec k}$$

b) $$\sum_{m,n} c^{\dagger}_{m+1,n} c_{m,n} + h.c. = \frac{1}{A^2}\sum_{\vec k,\vec k'} c^{\dagger}_{\vec k} c_{\vec k'} \underbrace{\sum_{m,n} e^{-ik_x(m+1)} e^{ik'_x m} e^{-ik_y n} e^{ik'_y n}}_{e^{-ik_x} A\, \delta_{k'_x,k_x}\, \delta_{k'_y,k_y}} + h.c.$$

$$= \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k}} c_{\vec{k}} \underbrace{\left(e^{-ik_x} + e^{ik_x}\right)}_{2\cos k_x}$$

c) $$\sum_{m,n} c^\dagger_{m+1,n} c^\dagger_{m,n} = \frac{1}{A^2} \sum_{\vec{k},\vec{k}'} c^\dagger_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k}'} \underbrace{\sum_{m,n} e^{-ik_x(m+1)} e^{-ik'_x m} e^{-ik_y n} e^{-ik'_y n}}_{A\, e^{-ik_x} \delta_{k'_x,-k_x} \delta_{k'_y,-k_y}}$$

$$= \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k}} c^\dagger_{-\vec{k}} \underbrace{e^{-ik_x}}_{= \cos k_x - i \sin k_x}$$

or $$\sum_{k_x} c^\dagger_{k_x} c^\dagger_{-k_x} \cos k_x = \sum_{k'_x} c^\dagger_{-k'_x} c^\dagger_{k'_x} \cos(-k'_x) = \sum_{k_x} \underbrace{c^\dagger_{k_x} c^\dagger_{-k_x}}_{= - c^\dagger_{-k_x} c^\dagger_{k_x}} \cos k_x \Rightarrow X = -X$$ i.e. $X = 0$.

$$= \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k}} c^\dagger_{-\vec{k}} \left(-i \sin k_x\right)$$

cqfd.

Dans la limite $\vec{p} \to 0$:

$$H_{BdG}(\vec{p}) \simeq \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu & 2i\Delta\,(p_x + i p_y) \\ -2i\Delta\,(p_x - i p_y) & -\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu\right) \end{pmatrix}$$

$e^{i\frac{\pi}{2}}$

Rq: $\Delta \circ p^l$
$l = 0$ onde s
$l = 1$ — p
$l = 2$ — d
etc

où $\frac{1}{2m} \equiv t$ et le terme d'appariement est en $\Delta \circ (p_x + i p_y)$ [plutôt qu'en Δ comme pour l'onde s] : il a la structure caractéristique de supra $p_x + i p_y$.

Brise TRS :

$$H_{BdG}(-\vec{p})^* = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0(-\vec{p})^* & -2i\Delta\left[\sin(-p_x) - i \sin(-p_y)\right] \\ cc & -\mathcal{E}_0(\vec{p})^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0(\vec{p}) & 2i\Delta\left(\sin p_x - i \sin p_y\right) \\ cc & -\mathcal{E}_0(-\vec{p}) \end{pmatrix}$$

$\neq H_{BdG}(\vec{p})$ à cause de

c'est le caractère chiral.

On aurait pu écrire de la supra $p_x + p_y$ plutôt que $p_x \pm i p_y$ [Onde p non-chiral].

$$H_{BdG}(\vec{p}) = \mathcal{E}_0(\vec{p})\, \tau_z - 2|\Delta| \sin p_x\, \tau_y - 2|\Delta| \sin p_y\, \tau_x$$

si $\Delta = |\Delta|$
(on peut faire ce choix si Δ est homogène)

Hamiltonien de Dirac 2 + 1 massif

$$\underset{\vec{p}\to 0}{\simeq} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu\right) \tau_z - 2|\Delta|\, p_x\, \tau_y - 2|\Delta|\, p_y\, \tau_x$$

$$H_{BdG}(\vec p) \underset{\vec p \to 0}{\simeq} \underbrace{-2|\Delta|}_{\equiv -v}\,(p_y \tau_x + p_x \tau_y) + \underbrace{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)}_{\equiv M(p)\,v^2} \tau_z$$

la masse de Dirac dépend de $\vec p$ on $M(p)$

Le spectre est $E_\pm(\vec p) = \pm\sqrt{4|\Delta|^2(\sin^2 p_x + \sin^2 p_y) + \mathcal{E}_0(\vec p)^2}$

On commence à avoir les ingrédients d'une structure de bande topologique.

Ce spectre est gapless en $\vec p = \underset{\Gamma}{(0,0)}$ si $\mu = 0$
en $\underset{X}{(\pi,0)}$ et $\underset{Y}{(0,\pi)}$ si $\mu = 4t$
en $\underset{M}{(\pi,\pi)}$ si $\mu = 8t$

à chaque fois $\begin{cases} \mathcal{E}_0(\vec p) = 0 \\ \sin p_x = 0 \\ \sin p_y = 0. \end{cases}$

$h_z(\vec p) > 0\ \forall \vec p \in BZ$ (north hemisphere) $\qquad h_z(\vec p) < 0\ \forall \vec p \in BZ$ (south hemisphere)

$\longrightarrow \mu$: $0 \quad 4t \quad 8t$

Chern $\nu = \ 0 \quad -1 \quad +1 \quad 0$

Le nombre de Chern ν de la bande occupée est donné par le degré de l'application :

$$\vec p \in \underset{= [-\pi,\pi[^2}{T^2 = BZ} \longrightarrow \vec h(\vec p) = \begin{vmatrix} -2|\Delta| \sin p_y \\ -2|\Delta| \sin p_x \\ -2t(\cos p_x + \cos p_y) - (\mu - 4t) \equiv M(\vec p) \end{vmatrix}$$

$$= E_+(\vec p)\, \underbrace{\hat n(\vec p)}_{\in S^2}$$

or $\Pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ nb d'enveloppement.

On parle de supra topologique qd $\nu \neq 0$.

Il y a des états de bord gapless chiraux (comme ds l'effet Hall quantique) mais ils ne sont pas chargés. Ce sont des modes de Majorana chiraux. Il n'y a pas d'EHQ mais une quantification du transport de la chaleur.

Rq : points de Dirac déf. par $h_x(\vec p) = 0 = h_y(\vec p) \Rightarrow \Gamma, X, Y$ et M

$M(\Gamma) = -\mu$ chiralité $= +$
$M(X) = M(Y) = 4t - \mu$ chiralité $= -$
$M(M) = 8t - \mu$ chiralité $= +$

$$\nu = \frac{1}{2}\sum_D \chi_D \,\mathrm{sgn}[M(D)]$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(-\mu) + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(8t-\mu) - \mathrm{sgn}(4t-\mu)$$

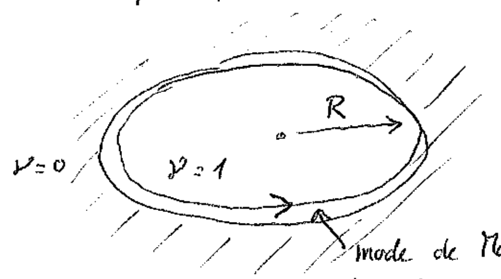
qd $\mu < 0$, $\nu = 0$ car hémisphère nord $M(\Gamma) > 0$
qd $0 < \mu$, $M(\Gamma) < 0$ donc $\Delta\nu = \pm 1 \to \nu = -1$ ms $M(X) = M(Y) > 0$ et $M(M) > 0$
qd $4t < \mu$, $M(X) = M(Y) = 4t - \mu < 0$ donc $\Delta\nu = \pm 2 \to \nu = +1$

qd $8t < \mu$ $M(M)$ chg de signe et devient <0 donc $\Delta\nu = \pm 1 \rightarrow \nu = 0$

4) Etat lié dans un vortex d'un supra chiral onde p avec $\nu = \pm 1$ (p. 206-209)

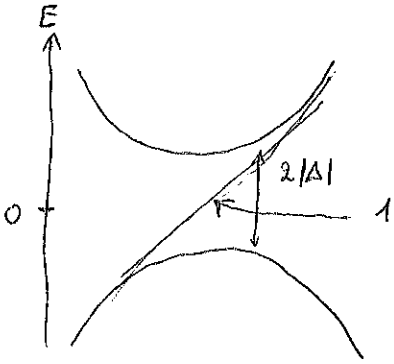
Argument qualitatif

Prenons un disque de supra topologique avec $\nu = 1$ et à l'extérieur soit le vide soit un supra avec $\nu = 0$:



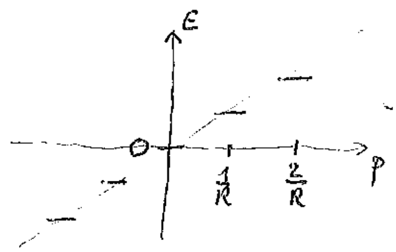
mode de Majorana chiral et gapless
(ie. fermion réel, non-chargé, une direct° de propagation).

Spectre



1 mode chiral gapless $E \simeq v\,p$ le long du bord

symétrie $E \rightarrow -E$



si PBC : $p = \text{entier} \times \frac{2\pi}{L}$ où $L = 2\pi R$

$= \text{entier} \times \frac{1}{R}$ alors $E_n = n\frac{v}{R} = (0;\pm 1;\pm 2;\dots)\frac{v}{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

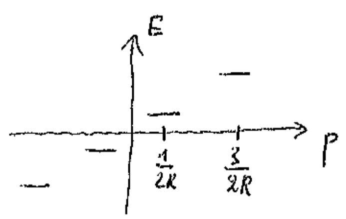
$\uparrow$
$\in \mathbb{Z}$

Mais par construction de H_{BdG} { la matrice $H_{BdG}(\vec{k})$ est de dimension $2N \times 2N$
l'espace de Hilbert est de dimension paire et symétrie $E \rightarrow -E$.

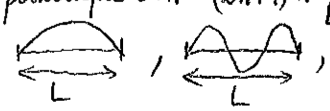
Donc s'il y a un état où $E = 0$, il y en a un deuxième nécessairement. Donc $p = \text{entier}/R$ est $\emptyset$.

En réalité, il y a une phase de Berry de π qui fait que $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{3}{2};\pm\frac{5}{2};\dots\right)\frac{v}{R}$



Rq: anti-périodique c'est $(2n+1) \times \frac{\pi}{L} = p$
car



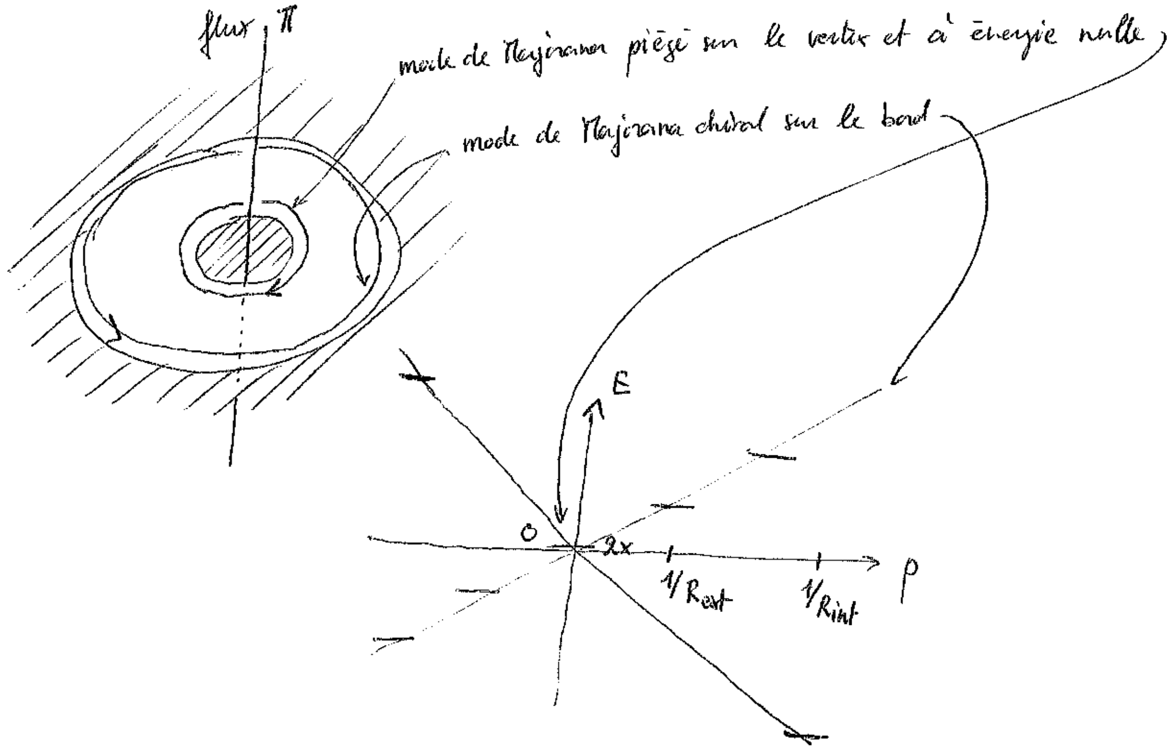
, etc

et on a bien un nb pair d'états et la symétrie $E \rightarrow -E$. Comme si ABC (anti-periodic boundary conditions)

Comment obtenir un mode de Majorana à énergie nulle (MZM) ? On va utiliser l'effet Aharonov-Bohm pour refaire passer les conditions au bord de ~~p~~ anti-périodique (APC) à périodique (PBC).

On insère un tube de flux $\frac{h}{2e} = \pi \frac{\hbar}{e}$ qui correspond à un déphasage de phase de π (en effet un vortex ds un supra de type II porte un flux quantifié à $\frac{\phi_0}{2} = \phi_0^{sc} = \frac{h}{2e}$). Ceci a pour effet de faire passer le mode de Majorana chiral à $E_n = n \frac{v}{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Comment rétablir la parité du nb d'états ? Il faut qu'il y ait un mode à énergie nulle piégé sur le vortex.

Conclusion : lorsqu'on insère un tube de flux dans un supra topo à $\nu = 1$ (impair) il y a un MZM piégé sur le cœur du vortex.



Rq : supra topo ν qcq $\simeq$ $\nu \times$ supra topo de Chern $= 1$
ds un vortex il y a ν MZM mais ils s'hybrident localement 2 par 2 et ne restent pas à énergie nulle.
Donc il y a un MZM ssi ν est impair. Classification $\mathbb{Z}_2$ des vortex.

Rq : un majorana (MZM) seul n'a pas d'espace de Hilbert, sa dim. quantique est $\sqrt{2}$
il faut deux majoranas pour faire un fermion complexe et avoir un espace de Hilbert de dim. 2.

En effet, si γ_1 et γ_2 sont 2 majos i.e. $\{\gamma_1, \gamma_2\} = 0$, $\gamma_1^+ = \gamma_1$, $\gamma_2^+ = \gamma_2$
et $\gamma_1^2 = 1$, $\gamma_2^2 = 1$

soit $c \equiv \frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{2}$ alors $\{c, c^+\} = \frac{1}{4}\{\gamma_1 + i\gamma_2, \gamma_1 - i\gamma_2\}$
$= \frac{1}{4}(2\gamma_1^2 + 0 + 0 + 2\gamma_2^2) = 1$

alors on déf. $|0\rangle$ par $c|0\rangle = 0$ et $|1\rangle$ par $|1\rangle = c^+|0\rangle$
alors $c^+c|0\rangle = 0$ et $c^+c|1\rangle = (1)|1\rangle$. Dim $= 2$ car vide ou occupé.
$c^2 = \frac{1}{4}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + i\gamma_1\gamma_2 + i\gamma_2\gamma_1) = \frac{1}{4}(1 - 1 + i\{\gamma_1, \gamma_2\}) = 0$ ok.

Classification (periodic table) of topological insulators and superconductors

A.P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki and A.W.W. Ludwig, arXiv:0905.2029 and arXiv:0803.2786

see also A. Kitaev, arXiv:0901.2686

TABLE 2. Summary of the *main result of this paper*: listed are again the ten symmetry classes of single particle Hamiltonians (from TABLE 1) classified in terms of the presence or absence of time-reversal symmetry (TRS) and particle-hole symmetry (PHS), as well as sublattice (or "chiral") symmetry (SLS) [17, 18, 19]. The last three columns list all possible topologically non-trivial quantum ground states as a function of symmetry class and spatial dimension d. The symbols $\mathbf{Z}$ and $\mathbf{Z}_2$ indicate that the space of quantum ground states is partitioned into different topological sectors labeled by an integer ($\mathbf{Z}$), or a $\mathbf{Z}_2$ quantity (two sectors only), respectively.

System	Cartan nomenclature	TRS	PHS	SLS	$d=1$	$d=2$	$d=3$
standard (Wigner-Dyson)	A (unitary)	0	0	0	-	$\mathbf{Z}$	-
	AI (orthogonal)	+1	0	0	-	-	-
	AII (symplectic)	−1	0	0	-	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
chiral (sublattice)	AIII (chiral unit.)	0	0	1	$\mathbf{Z}$	-	$\mathbf{Z}$
	BDI (chiral orthog.)	+1	+1	1	$\mathbf{Z}$	-	-
	CII (chiral sympl.)	−1	−1	1	$\mathbf{Z}$	-	$\mathbf{Z}_2$
BdG (supras)	D	0	+1	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$	-
	C	0	−1	0	-	$\mathbf{Z}$	-
	DIII	−1	+1	1	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$
	CI	+1	−1	1	-	-	$\mathbf{Z}$

AQH

QSH

STI

chaîne de Majorana

chiral p_x+ip_y SC, film

^{3}He-A

^{3}He-B superfluid

SSH mais en version orbitale s et p sur le m site

Supra de les organiques 1D.

supra $(p_x+ip_y)\uparrow$ + $(p_x-ip_y)\downarrow$

TABLE 4. Reorganizing Table 2 by reordering the symmetry classes and grouping them into two separate lists reveals a regular pattern, which was recently pointed out by A. Kitaev Ref. [16].

Cartan nomenclature	TRS	PHS	SLS	Hamiltonian	$d=1$	$d=2$	$d=3$
AIII (chiral unit.)	0	0	1	$U(N+M)/U(N)\times U(M)$	$\mathbf{Z}$	-	$\mathbf{Z}$
A (unitary)	0	0	0	$U(N)$	-	$\mathbf{Z}$	-
BDI (chiral orthog.)	+1	+1	1	$SO(N+M)/SO(N)\times SO(M)$	$\mathbf{Z}$	-	-
D BdG	0	+1	0	$SO(2N)$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$	-
DIII BdG	−1	+1	1	$SO(2N)/U(N)$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$
AII (symplectic)	−1	0	0	$U(2N)/Sp(2N)$	-	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
CII (chiral sympl.)	−1	−1	1	$Sp(2N+2M)/Sp(2N)\times Sp(2M)$	$\mathbf{Z}$	-	$\mathbf{Z}_2$
C BdG	0	−1	0	$Sp(2N)$	-	$\mathbf{Z}$	-
CI BdG	+1	−1	1	$Sp(2N)/U(N)$	-	-	$\mathbf{Z}$
AI (orthogonal)	+1	0	0	$U(N)/O(N)$	-	-	-

périodicité complexe de Bott (2 classes)

périodicité réelle de Bott (8 classes)