

Résumé des travaux de recherche

Nicolas Dupuis

Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée,
Sorbonne Université & CNRS

(4 mars 2021)

Table des matières

1	Introduction : corrélations dans les fluides quantiques	1
2	Conducteurs organiques quasi-unidimensionnels	3
3	Modèle de Hubbard bidimensionnel	4
4	Théorie des liquides de Fermi et groupe de renormalisation	6
5	Superfluidité d'un gaz de bosons	6
6	Transition superfluide-isolant de Mott d'un gaz de bosons	7
7	Transitions de phase quantiques	8
8	Désordre et interactions dans un gaz de bosons unidimensionnel	9
9	Systèmes quantiques hors d'équilibre	9
10	Développements méthodologiques du groupe de renormalisation non-perturbatif	9

La section 1 est consacrée à une introduction générale au problème des corrélations dans les fluides quantiques. Les sections suivantes décrivent brièvement mes principaux travaux de recherche.

1 Introduction : corrélations dans les fluides quantiques¹

Même si de nombreuses propriétés électroniques des solides peuvent s'expliquer à partir de modèles d'électrons quasi-indépendants se déplaçant dans le potentiel électrostatique créé par le réseau cristallin, certains phénomènes, en particulier à basse température, trouvent leur origine dans les comportements collectifs des électrons. Un des phénomènes collectifs les plus remarquables est celui de la supraconductivité, que l'on peut voir comme la condensation de Bose-Einstein de paires d'électrons (paires de Cooper) dans un état quantique macroscopique. Dans certains cas, ces phénomènes collectifs peuvent être décrits

1. La plupart des travaux mentionnés ici résultant de collaborations, j'ai choisi d'utiliser le pronom personnel pluriel "nous".

à partir des approches du problème à N corps développées dans les années 1950-60. Ainsi la supraconductivité “conventionnelle” peut-elle être décrite par la théorie de champ moyen de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS).

Depuis plusieurs décennies, les chimistes ont été capables de synthétiser des matériaux aux propriétés électroniques remarquables – supraconducteurs à haute température critique, conducteurs organiques, systèmes de fermions lourds, etc. – qui mettent en échec les approches traditionnelles du problème à N corps en matière condensée. Il n’est pas rare d’observer à la fois des phases supraconductrice et antiferromagnétique dans le diagramme de phase de ces composés, alors que ces deux phénomènes sont *a priori* incompatibles puisqu’ils nécessitent des interactions attractives entre électrons pour l’un et répulsives pour l’autre. L’échec des approches théoriques usuelles s’explique en général par la faible dimensionnalité de ces matériaux et parfois aussi la force des interactions de Coulomb entre électrons. Par exemple, les supraconducteurs à haute température critique sont quasi-bidimensionnels et les conducteurs organiques quasi- unidimensionnels. Faible dimensionnalité et interaction forte exacerbent les corrélations entre électrons et mènent à des phénomènes physiques nouveaux. Les phases observées à basse température, même lorsqu’elles sont métalliques, diffèrent souvent de manière significative des métaux conventionnels décrits par la théorie de Landau des liquides de Fermi. De même, les phases ordonnées (par exemple supraconductrice ou antiferromagnétique) sont souvent impossibles à expliquer à partir de théories de champ moyen basées sur les interactions microscopiques. Les différentes phases quantiques observées à basse température apparaissent plutôt comme le résultat de phénomènes collectifs complexes pouvant faire émerger des interactions effectives entre électrons qui ne sont pas présentes à haute température (c’est-à-dire à des échelles microscopiques).

Aux systèmes électroniques étudiés en physique des solides, il convient d’ajouter les gaz atomiques ultrafroids créés par les physiciens de l’optique quantique depuis quelques années. Ces gaz sont très étudiés depuis l’observation en 1995 de la condensation de Bose-Einstein dans des vapeurs de rubidium et de sodium. La condensation de Bose-Einstein (BEC), décrite théoriquement dès 1925, a joué un rôle crucial pour la compréhension de la superfluidité de hélium 4. Parce qu’ils offrent un contrôle inégalé des paramètres expérimentaux, les gaz atomiques ultrafroids ont relancé l’intérêt pour la superfluidité, notamment en permettant la réalisation d’un grand nombre d’expériences inédites (interférences entre condensats, lasers à atomes, etc.). Plus récemment, il est devenu possible de réaliser des gaz atomiques ultrafroids fortement corrélés. Le piège de confinement du gaz peut être choisi de telle sorte à rendre le système effectivement bi- ou unidimensionnel. D’autre part, des ondes optiques stationnaires peuvent être utilisées pour créer un potentiel périodique (analogue au réseau cristallin des solides) agissant sur les atomes et dont la force dépend directement de la puissance de ces ondes. Ceci a permis l’observation d’une transition de phase entre un superfluide et un isolant de Mott dans un gaz de bosons. Il est également possible de modifier les interactions en utilisant des résonances – dites de Feshbach – dans l’amplitude de diffusion entre deux atomes que l’on peut contrôler avec un champ magnétique. Ces résonances ont un intérêt particulier dans le cas d’atomes fermioniques puisqu’elles permettent de contrôler le passage (*crossover*) BCS-BEC dans un gaz superfluide. Les gaz atomiques ultrafroids se révèlent donc être des systèmes idéaux pour l’étude des liquides quantiques fortement corrélés. Ils permettent la simulation expérimentale d’Hamiltoniens modèles (modèle de (Bose-)Hubbard, etc.) étudiés auparavant en physique des solides. Ils mènent également à la réalisation expérimentale

de systèmes quantiques fortement corrélés sans équivalent connu par ailleurs comme les gaz de bosons à plusieurs degrés de liberté interne ou les mélanges bosons-fermions.

Contrairement aux transitions de phase à température finie, les transitions de phase quantiques entre états fondamentaux de symétries différentes sont entièrement pilotées par les fluctuations quantiques liées au principe d’incertitude d’Heisenberg. Bien que de telles transitions n’existent *stricto sensu* qu’à température nulle, l’existence d’un point quantique critique modifie profondément les propriétés physiques à température finie. Dans le régime dit “quantique critique”, obtenu à partir du point quantique critique par une augmentation de la température, le système est caractérisé par l’absence de quasi-particules et la température est la seule échelle d’énergie pertinente ; les grandeurs physiques varient alors typiquement en loi de puissance de la température. Dans les systèmes d’électrons on s’attend à ce qu’un point quantique critique entre une phase ordonnée (ou localisée) et un métal puisse induire un comportement non-liquide de Fermi. Une activité importante, à la fois théorique et expérimentale, est dédiée à l’étude des propriétés (en particulier universelles) des systèmes au voisinage d’un point quantique critique. Mentionnons par exemple la transition de Mott des bosons dans un réseau optique, la transition antiferroaimant-métal dans les supraconducteurs à haute température critique ou encore la transition supraconducteur-isolant dans certains métaux désordonnés.

Mes activités de recherche s’inscrivent dans la thématique générale des fluides quantiques fortement corrélés. Certains de mes travaux sont formels ou méthodologiques, d’autres sont directement liés aux expériences. Mes premières années de recherche après mon doctorat furent essentiellement consacrées aux conducteurs organiques quasi-unidimensionnels et, dans une moindre mesure, au modèle de Hubbard bidimensionnel. Depuis 2005, mon activité est davantage tournée vers la physique des gaz de bosons ultrafroids (notamment en présence de désordre ces dernières années) et des transitions de phase quantiques. J’ai aussi consacré une partie de mon temps au développement méthodologique du groupe de renormalisation non-perturbatif, approche que j’ai utilisée pour étudier divers modèles de systèmes fortement corrélés réalisés notamment dans les gaz atomiques ultrafroids.

2 Conducteurs organiques quasi-unidimensionnels

Les conducteurs organiques quasi-unidimensionnels de la famille des sels de Bechgaard ou des sels de Fabre sont un exemple typique de système électronique fortement corrélé. À cause de leur forte anisotropie, ils montrent une très grande variété de phases issues du comportement collectif des électrons, avec en particulier des phases supraconductrice et antiferromagnétique coexistant dans le même diagramme de phase, ce qui n’est pas sans rappeler les supraconducteurs à haute température critique. D’un point de vue théorique, ils sont plus faciles à appréhender que les systèmes quasi-bidimensionnels. À suffisamment haute température, ils se comportent en effet comme des conducteurs unidimensionnels (liquides de Luttinger) dont l’analyse théorique par diverses méthodes est bien maîtrisée.

Nous nous sommes intéressés à l’origine de la supraconductivité dans ces matériaux où la présence du magnétisme et d’une phase isolante de Mott dans certains composés révèle clairement l’importance des interactions de Coulomb.² En utilisant une approche basée sur le groupe de renormalisation, nous avons pu reproduire le diagramme de phase

2. Thèse de Christoph Nickel (2002-2004).

expérimental et montrer que la phase supraconductrice était soit singulet de symétrie orbitale d soit triplet de symétrie f selon la portée des interactions. L’interaction attractive à l’origine de la supraconductivité provient des fluctuations collectives de spin et de charge induites par les interactions de Coulomb. Les expériences réalisées jusqu’à présent, peu nombreuses, restent controversées et ne permettent pas de conclure de manière définitive quant à la nature de la supraconductivité. Néanmoins, de manière remarquable toutes les hypothèses formulées par les expérimentateurs – et en particulier la possibilité d’une phase triplet – peuvent s’expliquer dans le cadre de nos résultats.

Une autre facette intéressante de ces conducteurs organiques concerne les effets d’un champ magnétique, dont la particularité provient de la géométrie ouverte de la surface de Fermi dans ces matériaux anisotropes. Le champ tend à “unidimensionaliser” le mouvement électronique et favorise de ce fait l’apparition de phases onde de densité de spin (ODS). Expérimentalement, on observe une cascade de phases ODS séparées par des transitions du premier ordre et présentant un effet Hall quantique. Nous nous sommes intéressés à plusieurs aspects de ce diagramme de phase (dont la théorie fut développée dans les années 80). En particulier, nous avons montré que les processus Umklapp pouvaient expliquer l’existence de plateaux de Hall négatifs (anomalie de Ribault) observés expérimentalement et conduire à l’existence de phases ODS hélicoïdales polarisées circulairement. Nous avons également étudié les déviations à la quantification exacte de l’effet Hall à température non-nulle et la possibilité que les transitions du premier ordre soient remplacées par un simple passage (*crossover*).

Un autre effet remarquable de cette unidimensionalisation est de rendre possible l’existence d’une phase supraconductrice sous fort champ magnétique (effet prédit par Lebed). Nous avons montré que le champ induisait une cascade de phases supraconductrices séparées par des transitions du premier ordre. Cette cascade se termine par une forte remontée de la température de transition où la supraconductivité devient quasi-unidimensionnelle (couplage Josephson interchaîne). Cette réentrance n’est pas entièrement détruite par le couplage Zeeman lorsque l’appariement est singulet, l’état supraconducteur étant alors de type Larkin-Ovchinnikov-Fulde-Ferrell. Nos travaux sont en partie à l’origine de la recherche expérimentale de la supraconductivité sous fort champ magnétique dans les sels de Bechgaard. Ils sont régulièrement invoqués comme explication (partielle) possible du fort champ critique H_{c2} – supérieur à la limite de Pauli-Clogston H_P et à la limite orbitale attendue selon un modèle de Ginzburg-Landau – observé dans ces matériaux.

3 Modèle de Hubbard bidimensionnel

L’un des Hamiltoniens les plus étudiés dans le cadre des fermions corrélés est celui du modèle de Hubbard. Il décrit des particules se déplaçant sur un réseau avec une amplitude de saut intersite t et une répulsion Coulombienne sur site U . Il est généralement admis qu’à demi-remplissage (un électron par site en moyenne), l’état fondamental est antiferromagnétique pour toute valeur du rapport U/t . Une question de première importance, notamment dans le contexte des supraconducteurs à haute température critique, est de savoir si l’état fondamental peut devenir supraconducteur lorsque le système est dopé hors du demi-remplissage.

La plupart des théories ne permettent pas de décrire tous les aspects de la physique du modèle de Hubbard bidimensionnel même dans le cas (relativement simple) du

demi-remplissage. Certaines approches, comme la théorie de champ moyen dynamique, décrivent correctement la localisation de Mott induite par l’interaction de Coulomb, mais ne tiennent pas compte des fluctuations de spin antiferromagnétiques qui jouent un rôle si important en dimension 2. D’autres approches, notamment diagrammatiques, sont limitées au couplage faible.

Nous avons mis sur pied un formalisme qui permet d’étudier à la fois les propriétés magnétiques et le comportement individuel des électrons du modèle de Hubbard bidimensionnel.³ Notre approche décrit les fluctuations antiferromagnétiques par un modèle σ non-linéaire pour toute valeur de U et reproduit le modèle σ non-linéaire issu du modèle d’Heisenberg en couplage fort. Elle permet aussi de calculer la fonction spectrale à un électron. Nous avons ainsi décrit l’évolution, en fonction du rapport U/t , d’un antiferro-aimant de type Slater (électrons itinérants) vers un antiferro-aimant de type Mott-Heisenberg (électrons localisés). À température finie, où l’ordre antiferromagnétique disparaît (théorème de Mermin-Wagner), le système évolue d’une phase pseudo-gap vers un isolant de Mott-Hubbard caractérisé par un gap dans la fonction spectrale à un fermion.

Le modèle de Hubbard attractif ($U < 0$) est adapté aux gaz de fermions où les interactions sont attractives à basse énergie. Il permet d’étudier le passage BCS-BEC lorsque la force du couplage $|U|$ augmente. Ce passage a connu un regain d’intérêt ces dernières années. D’une part, il a été suggéré que les supraconducteurs à haute température critique pourraient se trouver dans un régime intermédiaire entre la limite BCS de couplage faible et la limite de couplage fort où la supraconductivité résulte de la condensation de Bose-Einstein de bosons composites.⁴ D’autre part, dans les gaz ultrafroids qui sont maintenant produits expérimentalement, il est possible de contrôler l’évolution entre la limite BCS et la limite BEC au moyen d’une résonance de Feshbach. Outre le passage BCS-BEC à température nulle, le modèle de Hubbard attractif bidimensionnel a également l’intérêt de présenter une transition de type Kosterlitz-Thouless (KT) vers une phase basse température supraconductrice mais sans ordre à longue portée. La température de transition T_{KT} tend vers zéro au demi-remplissage à cause des fluctuations de charge qui se combinent aux fluctuations supraconductrices pour former un paramètre d’ordre à 3 composantes réelles (symétrie $SO(3)$). En utilisant la correspondance entre le modèle de Hubbard attractif et le modèle de Hubbard répulsif demi-rempli en présence d’un champ magnétique, nous avons déterminé le diagramme de phase en fonction de la température, de la force du couplage $|U|$ et de la densité moyenne de fermions.

Nous avons également étudié le modèle de Hubbard attractif tridimensionnel à partir de la théorie de champ moyen dynamique (DMFT) combinée au groupe de renormalisation numérique. Cette théorie permet d’obtenir la dépendance en fréquence des fonctions de corrélation, quantités difficiles à calculer dans le cadre des approches de type champ moyen (Nozières–Schmitt-Rink) couramment employées pour étudier le passage BCS-BEC. Nous avons montré que les excitations élémentaires de la théorie BCS (quasi-particules de Bogoliubov), bien définies en couplage faible, se transforment progressivement en excitations incohérentes en couplage fort.

3. Thèse de Karol Borejsza (2000-2004).

4. Un gaz fermionique superfluide évolue d’une phase de type BCS en couplage faible (où la superfluidité provient des paires de Cooper) vers une phase “bosonique” en couplage fort où la superfluidité est due à la condensation de Bose-Einstein de bosons composites (état lié de deux fermions).

4 Théorie des liquides de Fermi et groupe de renormalisation

La théorie des liquides de Fermi est l'une des bases de notre compréhension des systèmes de fermions en interaction. La découverte de nouveaux matériaux montrant de fortes déviations au comportement canonique d'un liquide de Fermi a motivé de nombreux travaux théoriques afin de clarifier la validité et les limitations de cette théorie.

Bien que connu pour les systèmes uni- ou quasi-unidimensionnels, le groupe de renormalisation n'a été appliqué aux systèmes fermioniques isotropes en dimension 2 ou 3 que depuis les années 90. L'idée de base du groupe de renormalisation (dans sa version Kadanoff-Wilson) est d'intégrer les degrés de liberté fermioniques progressivement en réduisant la bande des énergies à une particule. Ce faisant, on suit l'évolution des grandeurs physiques (amplitude d'interaction entre fermions, fonctions réponse, etc.) *via* des équations de renormalisation. Les quantités physiques (mesurables) sont obtenues à la fin de ce processus lorsque tous les degrés de liberté fermioniques ont été intégrés. Il y a une analogie évidente avec la renormalisation de la théorie ϕ^4 pour l'étude des phénomènes critiques avec néanmoins deux différences importantes. D'une part le champ ϕ devient un champ Grassmannien anticommutant ψ (à cause de la statistique de Fermi-Dirac) qui dépend du temps (nature quantique des fermions). D'autre part, les modes de basse énergie ne sont pas les modes à $k \sim 0$, mais les modes proches de la surface de Fermi $k \sim k_F$. Ce dernier point rend l'analyse beaucoup plus difficile (sauf à une dimension où la surface de Fermi se réduit à deux points) que dans le cas des phénomènes critiques.

Dans la description des liquides de Fermi par le groupe de renormalisation, j'ai montré qu'il était primordial de prendre en compte non seulement le canal de son zéro mais aussi le canal d'échange dans la dérivation des équations de renormalisation. Ceci nous a conduit à une définition plus rigoureuse (dans le cadre du groupe de renormalisation) des paramètres de Landau et nous a permis de retrouver les principaux résultats de la théorie des liquides de Fermi. J'ai depuis montré comment on pouvait systématiquement redériver la théorie des liquides de Fermi à partir du groupe de renormalisation, notamment les modes collectifs et les fonctions réponses. J'ai également calculé les propriétés de quasi-particules (temps de vie et poids spectral) à partir d'un calcul de la self-énergie à deux boucles retrouvant ainsi des résultats obtenus par des approches différentes (bosonisation en dimension 2 ou approche basée sur les identités de Ward).

5 Superfluidité d'un gaz de bosons

La superfluidité est en général décrite par la théorie de Bogoliubov. Celle-ci prédit que les excitations de basse énergie sont des phonons dont le spectre linéaire en impulsion explique la superfluidité (selon le critère de Landau). Dès les années 1960, il a été remarqué que la théorie de Bogoliubov n'est pas correcte à basse énergie, ce qui se traduit par des divergences infrarouges dans la théorie de perturbation au-delà de l'approche de Bogoliubov. Nous avons reconsidéré ce problème du point de vue du groupe de renormalisation non-perturbatif (une formulation du groupe de renormalisation à la Wilson qui permet d'obtenir des résultats non-perturbatifs, *cf.* section 10). La théorie de Bogoliubov n'est exacte à basse énergie qu'en dimension $d > 3$; pour $d \leq 3$ le point fixe de Bogoliubov est instable bien que le mode de basse énergie reste de type phonon (résultats également obtenus par Castellani *et al.*). Le point fixe qui gouverne la physique à basse énergie correspond à la théorie hydrodynamique de Popov. Le groupe de renormalisation

non-perturbatif nous a également permis de calculer la fonction spectrale des bosons à toute échelle d'énergie et de donner ainsi une description globale de la superfluidité. Nous avons aussi obtenu, pour des interactions faibles, une bonne description du comportement de type liquide de Luttinger en dimension un où la superfluidité n'est pas accompagnée d'une condensation de Bose-Einstein.

À l'aide du groupe de renormalisation non-perturbatif nous avons étudié la thermodynamique du gaz de Bose bidimensionnel.⁵ Dans la limite diluée, la pression $P(\mu, T)$ du gaz dans l'ensemble grand-canonique est entièrement déterminée par une fonction d'échelle universelle avec comme seules variables non-universelles la masse m des bosons et leur longueur de diffusion a . Nos résultats sont en accord remarquable avec les expériences sur les gaz atomiques ultrafroids, notamment celles du groupe de J. Dalibard à l'École Normale Supérieure (Paris).

Nous nous sommes également intéressés à la transition superfluide d'un gaz de bosons de spin 1 et avons montré que ces systèmes sont dans la même classe d'universalité (définie par une théorie des champs de symétrie $O(3) \times O(2)$) que les antiferro-aimants sur réseau triangulaire (un exemple de système magnétique frustré).⁶ Nous avons ainsi proposé d'utiliser les gaz de bosons de spin 1 pour simuler les antiferro-aimants sur réseau triangulaire, ce qui permettrait de résoudre la controverse quant à la nature de la transition (premier ou second ordre) dans ces systèmes. Nos calculs théoriques, basés sur le groupe de renormalisation non-perturbatif, prédisent une transition faiblement du premier ordre avec un comportement "pseudo-critique". L'exposant pseudo-critique ν associé à la longueur de corrélation ne dépend que de la longueur de diffusion a dans l'onde s et a été calculé pour les gaz de bosons de spin 1 réalisés actuellement en laboratoire : ^{87}Rb , ^{41}K , ^7Li .

6 Transition superfluide-isolant de Mott d'un gaz de bosons

L'observation expérimentale de la transition superfluide-isolant de Mott d'un gaz bosonique ultrafroid dans un réseau optique a relancé l'intérêt pour l'étude du modèle de Bose-Hubbard (modèle de Hubbard pour les bosons). La théorie de Bogoliubov ne prévoit pas la transition vers l'isolant de Mott observée pour des densités commensurables (nombre moyen entier de bosons par site). Nous avons étudié cette transition à partir d'un développement de couplage fort. Nous nous sommes en particulier intéressés au diagramme de phase d'un gaz de bosons dans un réseau optique au voisinage d'une résonance de Feshbach menant à la formation de molécules (état lié de deux atomes). En fonction de la densité de bosons, de l'amplitude de saut intersite et du champ magnétique contrôlant la résonance, l'état fondamental peut être un superfluide – soit avec un condensat moléculaire soit avec un condensat atomique et moléculaire – ou, lorsque la densité est commensurable, un isolant de Mott.

Nous avons étendu au cas de systèmes bosoniques la théorie de perturbation interamas variationnelle (*Variational Cluster Perturbation Theory*, VCPT), une approche initialement mise au point pour les systèmes de fermions corrélés et qui découle de la théorie de la fonctionnelle de la self-énergie inventée par Potthoff (*Self-energy Functional Theory*, SFT), et l'avons appliquée au modèle de Bose-Hubbard unidimensionnel. Nos résultats

5. Thèse d'Adam Rançon (2009-2012).

6. Thèse de Thibault Debelhoir (2013-2016).

pour le diagramme de phase sont en accord remarquable avec ceux obtenus par le groupe de renormalisation de la matrice densité (*Density Matrix Renormalization Group*).

Pour étudier les aspects universels de la transition de Mott, nous avons mis au point une version du groupe de renormalisation qui s’applique au modèle de Bose-Hubbard.⁵ Notre approche reproduit le diagramme de phase avec une très bonne précision (comparée aux simulations Monte Carlo) et décrit les deux classes d’universalité de la transition selon que celle-ci est induite par dopage ou variation de la répulsion entre bosons. Elle nous a également permis de déterminer l’équation d’état du gaz au voisinage de la transition de Mott. En particulier, pour la transition générique (induite par dopage), nous avons montré que l’équation d’état est la même que celle d’un gaz dilué mais avec une masse effective m^* et une longueur de diffusion effective a^* qui correspondent aux excitations élémentaires (de dispersion quadratique) au point quantique critique entre la phase superfluide et l’isolant de Mott.

7 Transitions de phase quantiques

Nous avons étudié les propriétés universelles du modèle $O(N)$ quantique relativiste bi-dimensionnel,⁷ un modèle qui décrit de nombreux systèmes de matière condensée (systèmes de spin quantiques, gaz de Bose au voisinage de la transition de Mott (à densité constante), etc.).⁸ Nous avons montré que, conséquence de la correspondance classique-quantique, la fonction d’échelle universelle qui détermine la pression définit aussi la force de Casimir d’un système classique tridimensionnel confiné dans une direction de l’espace et appartenant à la même classe d’universalité. Nos résultats pour cette fonction d’échelle sont en accord remarquable avec les simulations Monte Carlo réalisées sur des modèles de spin classiques tridimensionnels. Nous nous sommes également intéressés au mode d’amplitude (ou mode de “Higgs”). L’existence de ce mode au voisinage du point quantique critique, lorsque les fluctuations sont prises en compte au delà du champ moyen, a été l’objet de nombreuses études. Nos résultats, basés sur le groupe de renormalisation non-perturbatif (dans le cadre de l’approximation dite de Blaizot–Méndez-Galain-Wschebor), montrent l’existence d’une résonance de Higgs bien définie pour $N = 2$ et $N = 3$ mais pas pour les valeurs supérieures. Notre estimation de l’énergie de la résonance (i.e. la “masse” du Higgs) pour $N = 2$ et 3 a été confirmée ultérieurement par plusieurs travaux basés sur des études numériques de systèmes de spins quantiques (diagonalisation exacte). Récemment nous avons calculé la conductivité dynamique $\sigma(\omega)$ du modèle $O(N)$ quantique dans le régime universel. La conductivité (mesurée en unité du quantum de conductance) est universelle au point critique quantique et nos résultats sont en bon accord pour $N = 2$ avec les simulations Monte Carlo et le “bootstrap” conforme. Notre résultat le plus marquant est l’existence, dans la phase ordonnée, d’une composante super-universelle du tenseur conductivité qui ne dépend ni de la distance au point critique ni de la valeur de N .

7. Théorie quantique φ^4 pour un champ à N composantes

8. Thèse de Félix Rose (2014-2017).

8 Désordre et interactions dans un gaz de bosons unidimensionnel

La transition de Mott dans les fluides quantiques unidimensionnels (systèmes d'électrons fortement corrélés et gaz atomiques ultrafroids) peut être décrite par le modèle de sine-Gordon. Bien que ce modèle soit intégrable, toutes ses propriétés ne peuvent être calculées exactement et il est nécessaire de recourir à des méthodes de résolution approchée. En utilisant le groupe de renormalisation non-perturbatif, nous avons calculé la masse des excitations (solitons, antisolitons et état lié soliton-antisoliton) dans la phase massive du modèle, en très bon accord avec les résultats exacts. D'autre part nous avons vérifié, avec une précision de 1%, la conjecture de Lukyanov et Zamolodchikov concernant la valeur moyenne de l'exponentielle du champ.⁹

En présence de désordre, un gaz de bosons unidimensionnel peut être décrit par un modèle de type sine-Gordon. Ce modèle prédit une transition entre une phase superfluide et une phase localisée dite verre de Bose. Le groupe de renormalisation non-perturbatif montre que la phase localisée est décrite par un point fixe de fort désordre présentant un corrélateur désordre-désordre singulier ("cusp") relié à l'existence d'états métastables et aux propriétés vitreuses (piégeage, avalanches, etc.). L'effet tunnel quantique entre ces états contrôle la dynamique de basse énergie et la conductivité $\sigma(\omega)$. Ces résultats peuvent être compris dans le cadre de la théorie des gouttes (*droplets*) proposée pour la description des systèmes vitreux (classiques) par Fisher et Huse.⁹

En présence d'interactions à longue portée, décroissant en $1/|x|$ (Coulomb) ou moins rapidement, l'état fondamental du fluide pur est un cristal de Wigner caractérisé par une modulation spontanée de la densité. En présence de désordre, selon la portée des interactions, l'état fondamental est soit un cristal de Wigner soit un verre de Mott.⁹ Ce dernier, intermédiaire entre l'isolant de Mott et le verre de Bose, est caractérisé par une compressibilité nulle et une conductivité optique sans gap.

9 Systèmes quantiques hors d'équilibre

En collaboration avec R. Ghosh, A. Sen et K. Sengupta, je me suis intéressé à la dynamique des systèmes quantiques hors d'équilibre dans le cadre d'une approche théorique basée sur le formalisme de l'intégrale fonctionnelle. Nous avons montré comment, pour des systèmes décrits par des actions gaussiennes, on pouvait calculer diverses grandeurs physiques en utilisant le formalisme habituel de Matsubara (temps imaginaire) : entropie d'intrication, évolution temporelle hors d'équilibre, probabilité de retour et statistique de comptage.

10 Développements méthodologiques du groupe de renormalisation non-perturbatif

Une partie de notre activité a été consacrée à certains développements méthodologiques du groupe de renormalisation non-perturbatif (NPRG). Ce dernier est une formulation Wilsonienne du groupe de renormalisation développée depuis le début des années 90 notamment en Allemagne (autour de C. Wetterich) et en France. Cette formulation s'articule

9. Thèse de Romain Daviet, débutée en septembre 2018.

autour de l'énergie libre de Gibbs (ou action effective selon la terminologie de la théorie des champs) $\Gamma_\Lambda[m]$ des modes “rapides” (impulsion $|\mathbf{q}| > \Lambda$) plutôt que de l'action Wilsonienne $S_\Lambda[\varphi]$ des modes “lents” ($|\mathbf{q}| < \Lambda$) comme c'est le cas habituellement. L'équation exacte déterminant la dépendance de $\Gamma_\Lambda[m]$ – qui est une fonctionnelle du paramètre d'ordre $m(\mathbf{r})$ – en Λ peut être résolue dans le cadre d'approximations non-perturbatives, permettant ainsi d'accéder au régime de couplage fort de nombreux modèles de physique statistique.

Nous avons montré comment le NPRG pouvait reproduire la plupart des aspects universels de la transition de Kosterlitz-Thouless (KT) à partir d'une théorie des champs bidimensionnelle avec un paramètre d'ordre complexe, et ceci sans introduire explicitement les vortex comme dans les approches standard (gaz de Coulomb, modèles de Villain et de sine-Gordon). Une étude similaire a été effectuée dans le cas de plans faiblement couplés afin de mettre en évidence les signatures possibles de la physique KT dans les systèmes quasi-bidimensionnels.

D'autre part, nous avons développé une version du NPRG qui s'applique aux modèles sur réseau. Cette approche est exacte dans la limite à un site et traite les fluctuations critiques avec la même précision que le NPRG standard. Il s'agit donc d'une des rares approches qui traitent sur un pied d'égalité les fluctuations locales et les fluctuations critiques. Nous l'avons utilisée en particulier pour l'étude du modèle de Bose-Hubbard (*cf.* section 6).

Nous avons également proposé un schéma d'approximation (dénommé LPA'') qui permet de calculer la dépendance en impulsion et en fréquence des fonctions de corrélation. La LPA'' nous a permis en particulier d'obtenir la dépendance en fréquence de la conductivité du modèle $O(N)$ quantique (*cf.* section 7).

Dans sa version standard le NPRG ne peut être appliqué aux systèmes de fermions (pour des raisons liées à la statistique de Fermi-Dirac et à la nature Grassmannienne du champ quantique), ce qui explique que le groupe de renormalisation fermionique est en pratique toujours perturbatif. Nous avons développé une version 2PI (2 particules irréductible) du NPRG qui s'applique aux systèmes de fermions et qui permet en particulier d'étudier les phases à symétrie brisée (ce qui est difficile dans le cadre du groupe de renormalisation perturbatif). Bien que ce travail soit resté pour l'instant très formel, il pourrait servir de point de départ pour une approche qui allie NPRG et théorie de champ moyen dynamique.