

Introduction au principe variationnel et à la mécanique analytique



NOTES DE COURS DE LICENCE *L3-Phytem*

Nicolas Sator
Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée
Université Pierre et Marie Curie Paris 6

Depuis le XVII^{ème} siècle, l'approche variationnelle permet de décrire des phénomènes physiques à l'aide d'un principe d'économie, appelé en optique *principe de Fermat* et en mécanique *principe de moindre action* : le comportement observé d'un système correspond à la minimisation (ou à la maximisation) d'une certaine grandeur.

Ce cadre abstrait et général permet une reformulation simple et élégante de nombreux problèmes en physique (optique géométrique, mécanique classique, mécanique quantique, relativité, électromagnétisme). Mais au-delà de considérations esthétiques ou techniques, l'approche variationnelle forme la pierre angulaire de la physique statistique, de la théorie du chaos et de la théorie des champs. Dans ces notes de cours, nous aborderons quelques notions de calcul variationnel (et en particulier les équations d'Euler-Lagrange) que nous appliquerons par la suite dans le cadre de la mécanique analytique.

Bibliographie

- *Mécanique quantique, 1. Fondements et premières applications*, C. Aslan-gul (de Boeck, Bruxelles, 2007), chapitre 7
- *Analytical Mechanics*, R.R. Fowles and G. L. Cassiday (Brooks/Cole Thomson learning, 1999), chapter 10
- *Le cours de physique de Feynman, tome 1*, R. Feynman (Dunod, 1999), chapitre 19
- *Mécanique*, L. Landau et E. Lifchitz (Mir, Moscou, 1982)
- *Mécanique, De la formulation Lagrangienne au chaos Hamiltonien*, C. Gignoux et B. Silvestre-Brac (EDP Sciences, 2002)
- *Mécanique analytique*, R. Dandoloff (Publibook, 2005)

Table des matières

1	Introduction : le principe de Fermat	4
2	Approche variationnelle	5
2.1	Équation d'Euler-Lagrange	6
2.1.1	Notion de fonctionnelle	6
2.1.2	Démonstration de l'équation d'Euler-Lagrange	7
2.1.3	Formule de Beltrami	8
2.1.4	Exemples	8
2.2	Approche variationnelle avec des contraintes	10
2.2.1	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	11
2.2.2	Contraintes de type holonôme	15
2.2.3	Contraintes de forme intégrale	17

3	Rudiments de mécanique analytique	20
3.1	De Newton à Lagrange : une reformulation de la mécanique . . .	20
3.2	Le formalisme Lagrangien	20
3.2.1	Le principe de moindre action	20
3.2.2	Le Lagrangien	22
3.3	Le formalisme hamiltonien	24
3.3.1	Les équations de Hamilton	24
3.3.2	Les crochets de Poisson	28
3.4	Conclusion	29
3.5	Exercices	30
3.5.1	L'oscillateur harmonique	30
3.5.2	Le cerceau à vitesse angulaire constante	31
3.5.3	L'atome hydrogénoïde	34
3.5.4	La particule plongée dans un champ électromagnétique .	35

1 Introduction : le principe de Fermat

Les lois de l'optique géométrique – propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène, principe de retour inverse de la lumière et lois de la réflexion et de la réfraction de Snell (1621) et Descartes (1637)¹ – ont une origine phénoménologique.

En 1657, Pierre de Fermat propose une autre approche, plus abstraite, basée sur l'idée que “La nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples”². Le principe de Fermat s'énonce comme un principe de moindre temps³ : La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours est stationnaire. Il s'agit bien d'un principe variationnel car la durée du parcours doit être extrémale, en générale minimale, par rapport à une petite variation du trajet.

A l'aide de ce principe, on démontre immédiatement la loi de propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène. Les lois de Snell-Descartes se reformulent à la Feynman par une analogie cinématique.

Le problème du maître nageur

Telle la lumière qui se propage moins vite dans l'eau que dans l'air, un maître nageur court plus vite qu'il ne nage. Il se trouve au point A lorsqu'il aperçoit une jolie fille qui se noie en B . Comment arriver en B le plus vite possible ? Sachant que le maître nageur court en ligne droite à la vitesse v_1 et nage à la vitesse $v_2 < v_1$, quel est le point I où il doit plonger ? Il faut trouver un compromis entre la ligne droite et le parcours qui rend minimal le trajet dans l'eau. La réponse mathématique a été donnée par Maupertuis en 1744.

Comme on le voit sur la figure 1, la trajectoire du maître nageur est constituée de deux droites AI et IB , où $I(x, 0)$ est le point où le maître nageur plonge. A priori la distance AI sera plus grande que la distance IB car il court plus vite qu'il ne nage. Le temps $T(x)$ mis par le maître nageur pour aller de A en B est :

$$T = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2}$$

soit,

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

¹En fait le mathématicien arabe Ibn Sahl a découvert la loi de la réfraction dès 984.

²Lettre de Clerselier (cartésien, éditeur de Descartes) à Fermat (1662) : “Le principe que vous prenez pour fondement de votre démonstration, à savoir que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples, n'est qu'un principe moral et non point physique, qui n'est point et qui ne peut être la cause d'aucun effet de la nature”.

³Une formulation plus moderne repose sur la notion de chemin optique ($L = \int_C n dl$, où $n = c/v$ est l'indice de réfraction et c la vitesse de la lumière dans le vide) : Le trajet suivi par la lumière entre deux points A et B est celui qui correspond à une valeur stationnaire du chemin optique.

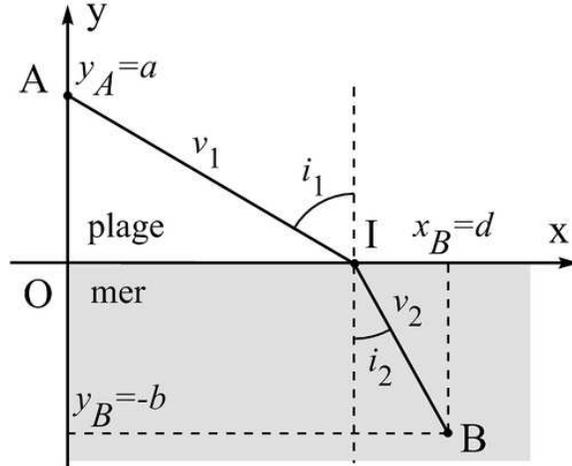


FIG. 1 – Le problème du maître nageur en A et de la fille qui se noie en B.

Le temps est minimal (il ne peut pas s'agir d'un maximum!) quand

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0,$$

soit

$$\frac{1}{v_1} \sin(i_1) = \frac{1}{v_2} \sin(i_2).$$

La vitesse de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction n étant $v = c/n$, où c est la vitesse dans le vide, on retrouve la loi de la réfraction de Ibn Sahl-Snell-Descartes. On montrerait de même la loi de la réflexion.

2 Approche variationnelle

Dans le cas de la loi de la réfraction, la trajectoire du rayon lumineux était déterminée par la valeur de x qui minimise $T(x)$. En général, c'est toute une fonction (par exemple une trajectoire) que l'on recherche. Par exemple, quel est le plus court chemin entre deux points A et B d'un plan ?

En notant s l'abscisse curviligne le long d'un chemin, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

où $y'(x) = \frac{dy}{dx}$. La longueur l du chemin est donnée par

$$l[y] = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

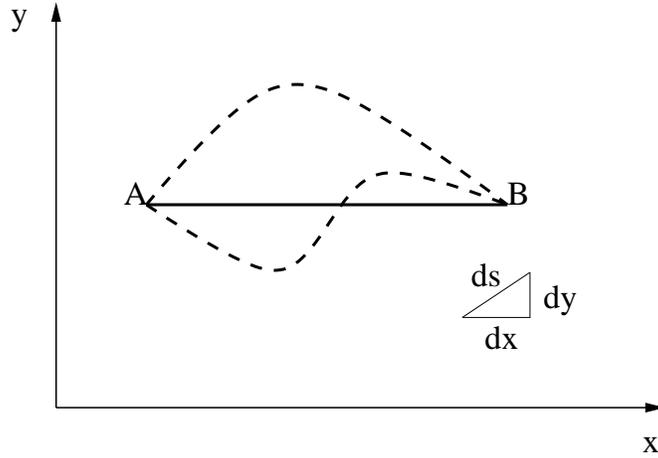


FIG. 2 – Le chemin le plus court entre deux points A et B.

On cherche donc la fonction $y(x)$ qui rend l'intégrale $l[y]$ minimale telle que $y(x_A) = y(x_B) = cte$. La réponse est bien sûr $y(x) = cte$, mais comment le démontrer ? Comme nous le verrons plus loin, un autre exemple plus intéressant est celui de la courbe brachistochrone qui est la trajectoire qui minimise le temps de parcours entre deux points dans le champ de pesanteur.

2.1 Équation d'Euler-Lagrange

2.1.1 Notion de fonctionnelle

La fonctionnelle est une généralisation de la fonction. Plutôt que de dépendre d'une (ou plusieurs) variable, une fonctionnelle dépend d'une (ou plusieurs) fonction, elle-même dépendant d'une (ou plusieurs) variable. C'est donc une "fonction de fonction".

Considérons une fonction $y(x)$ dépendant d'une variable x et une fonction f à trois variables non indépendantes $f(y(x), y'(x), x)$, où $y'(x) = \frac{dy}{dx}$. La fonction $y(x)$ étant connue, la fonction f prend donc une valeur déterminée pour une valeur de x donnée. Nous verrons que la dépendance en la dérivée $y'(x)$ intervient fréquemment, en particulier en mécanique. Remarquons que la fonction f dépend de x explicitement, mais aussi implicitement à travers $y(x)$ et $y'(x)$. La dérivée totale de f par rapport à x est donc :

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Définissons la fonctionnelle $S[y]$ par l'intégrale :

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx.$$

La fonctionnelle $S[y]$ est donc un nombre qui dépend de la fonction $y(x)$. L'approche variationnelle va nous permettre de déterminer la fonction $y(x)$ telle que $S[y]$ soit stationnaire (extrémale), sachant que $y(x_1)$ et $y(x_2)$ sont donnés.

Nous allons montrer que la fonction $y(x)$ qui remplit cette condition doit vérifier l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.}$$

2.1.2 Démonstration de l'équation d'Euler-Lagrange

Supposons que l'on connaisse la fonction $y_0(x)$, qui rend S extrémale. Puisque $S[y_0]$ est stationnaire, une petite variation $\eta(x)$ de la fonction $y(x)$ implique une variation $\delta S = 0$ au premier ordre en $\eta(x)$. Posons explicitement :

$$y(x) = y_0(x) + \eta(x),$$

où $\forall x, \eta(x) \ll y_0(x)$ et calculons la variation induite de la fonctionnelle pour une valeur de x fixée :

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(y_0(x) + \eta(x), y_0'(x) + \eta'(x), x) - f(y_0(x), y_0'(x), x) \right] dx.$$

Au premier ordre en $\eta(x)$ et en $\eta'(x)$, on a

$$f(y_0(x) + \eta(x), y_0'(x) + \eta'(x), x) \simeq f(y_0(x), y_0'(x), x) + \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x).$$

Donc

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx.$$

En intégrant par parties la seconde intégrale, on obtient :

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y} - \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx + \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Puisque $y(x_1)$ et $y(x_2)$ sont fixés, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ et le dernier terme de l'équation s'annule. Il reste :

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx.$$

Comme $\delta S = 0$, quelle que soit $\eta(x)$ on doit avoir :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange, qui s'écrit plus explicitement :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0.$$

2.1.3 Formule de Beltrami

Si la fonction f ne dépend pas explicitement de la variable x , ($\frac{\partial f}{\partial x} = 0$), on obtient la formule de Beltrami :

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C, \quad (1)$$

où C est une constante.

Démonstration :

Calculons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}] &= \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial f}{\partial y'} - y' [\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y''] \\ &= y' [\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'']. \end{aligned}$$

D'après l'équation d'Euler, le terme entre crochets est nul, ce qui démontre la formule.

2.1.4 Exemples

Le chemin le plus court

On cherche le chemin $y(x)$ qui minimise la longueur

$$l[y] = \int_{x_A}^{x_B} f(y') dx,$$

où $f(y') = \sqrt{1 + y'^2}$ avec $y(x_A) = y(x_B) = cte$. Puisque f ne dépend pas de y , on a d'après l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

où c est une constante. On trouve donc $y' = cte$, autrement dit, l'équation d'une droite qui passe par les points A et B . Dans cet exemple la réponse était évidente, mais l'approche variationnelle est très utile lorsque l'espace-temps est doté d'une métrique plus complexe dans le cadre de la théorie de la relativité.

La courbe brachistochrone

La courbe brachistochrone⁴ a été étudiée par Leibniz, Newton, Jacques et Jean Bernoulli et Euler : En partant d'une position donnée sans vitesse initiale, quelle est la trajectoire qui permet d'atteindre le plus rapidement possible une position finale dans le champ de pesanteur ?

Pour préciser les notations, supposons que l'objet parte du point A de coordonnées $x_A = 0$ et $y_A = h > 0$, sans vitesse initiale et glisse le long d'un toboggan jusqu'au point B de coordonnées $x_B = d > 0$ et $y_B = 0$ (voir la figure

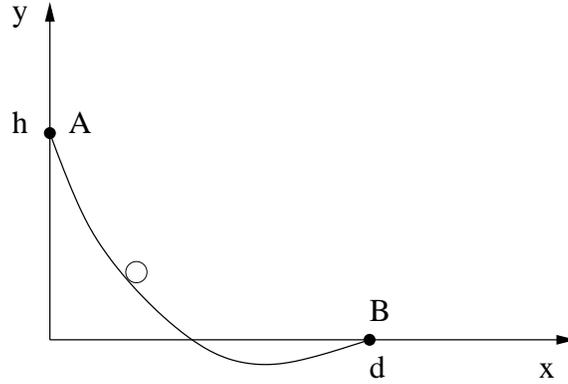


FIG. 3 – Un objet part du point A sans vitesse initiale et glisse le long de la courbe jusqu’au point B.

3). On doit donc exprimer la durée du parcours entre A et B, puis chercher la courbe (la forme du toboggan) qui minimise cette durée.

Soit s l’abscisse curviligne, un élément de courbe ds s’exprime en coordonnées cartésiennes

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

où $y' = \frac{dy}{dx}$. La vitesse de l’objet est donnée par $v = \frac{ds}{dt}$. La conservation de l’énergie mécanique implique

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh.$$

Exprimons le temps de parcours $T[y]$. C’est une fonctionnelle qui dépend de la forme $y(x)$ du toboggan. On a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\sqrt{2g(h - y)}}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

soit

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h - y)}} dx.$$

Le temps de parcours s’écrit donc :

$$T[y] = \int_0^d f(y, y') dx,$$

où $f(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h - y)}}$ ne dépend pas de x . On cherche donc la forme $y(x)$ qui minimise la fonctionnelle $T[y]$. Puisque f est indépendante de x , on peut

⁴En grec, “Brakhisto” signifie “le plus court” et “chronos”, le temps.

utiliser la formule de Beltrami

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C,$$

où C est une constante. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \sqrt{2g(h - y)}.$$

En élevant au carré on a donc :

$$1 + y'^2 = \frac{R}{h - y},$$

où $R = 1/2gC^2$. Posons $y' = \tan(\theta/2)$:

$$1 + y'^2 = 1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{R}{h - y},$$

soit

$$y = h - R \cos^2 \frac{\theta}{2} = h - \frac{R}{2}(1 + \cos \theta).$$

Par ailleurs,

$$y' = \tan(\theta/2) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{R}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dx} = R \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{dx},$$

donc

$$dx = R \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta,$$

soit en intégrant

$$x = \frac{R}{2}(\theta + \sin \theta) + cte \quad \text{et} \quad y = h - \frac{R}{2}(1 + \cos \theta),$$

que l'on peut écrire avec le changement de variable $\theta \rightarrow \theta - \pi$ et en imposant $x(0) = 0$:

$$x = \frac{R}{2}(\theta - \sin \theta) \quad \text{et} \quad y = h - \frac{R}{2}(1 - \cos \theta).$$

C'est l'équation d'une cycloïde. Reste à déterminer R pour que la trajectoire passe par le point B . Sur la figure 4, on remarque que la pente à l'origine est infinie pour obtenir une accélération initiale maximale

2.2 Approche variationnelle avec des contraintes

Dans un problème aux variations, il peut exister une (ou plusieurs) contrainte sur la fonction $y(x)$. Le problème isopérimétrique, en est une belle illustration : Dans le plan, quelle est la courbe fermée qui a la plus grande aire pour un périmètre donné ?

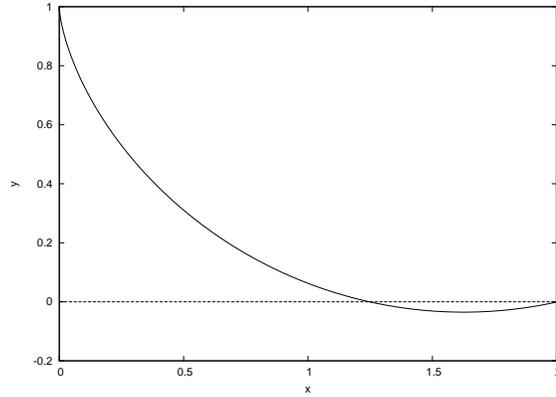


FIG. 4 – La courbe brachistochrone entre le point $A(0, 1)$ et le point $B(2, 0)$ pour $R \simeq 1.035$.

Dans le plan muni d'un repère cartésien, on cherche l'équation $y(x)$ de cette courbe telle que l'aire

$$A[x, y] = \oint y dx \quad (2)$$

soit maximale avec la contrainte suivante : le périmètre

$$l[x, y] = \oint \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (3)$$

est fixé.

2.2.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour simplifier, nous raisonnerons dans un premier temps à l'aide d'une *fonction* de plusieurs variables. La généralisation à la fonctionnelle ne posant pas de problème.

Par exemple, un fabricant souhaite produire un récipient cylindrique de volume fixé V dont la surface S soit la plus faible possible (pour minimiser la quantité de matériaux). Comment choisir la hauteur L et le rayon R du cylindre ?

La surface est une fonction de L et R : $S(L, R) = 2\pi R^2 + 2\pi RL$. On cherche le minimum de S avec la contrainte $V = \pi R^2 L$, où V est fixé. En remplaçant $L = V/\pi R^2$ dans $S(L, R)$ on se ramène facilement à une fonction à une variable dont il est facile de trouver le minimum obtenu pour $R = (V/2\pi)^{1/3}$, soit un rapport $L = 2R$ (qui se rapproche le plus d'une sphère).

Généralisons : Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction de n variables. Pour que f soit extrémale en un certain point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, il faut que

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad (4)$$

Si toutes les variables x_1, x_2, \dots, x_n sont indépendantes, cette condition est vérifiée pour

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1 \dots n. \quad (5)$$

Si les variables x_i vérifient une contrainte supplémentaire sous la forme (contrainte de type holonôme)

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (6)$$

les variables x_i ne sont plus indépendantes et l'extremum de la fonction n'est plus obtenu par l'équation (5). En revanche, d'après l'équation (6), les variations dx_i sont liées par :

$$dg = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad (7)$$

Puisque l'équation (7) relie les variables dx_i entre elles, une façon de procéder est d'exprimer dx_n en fonction de $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-1}$ et de remplacer dx_n dans l'équation (4). On se ramène donc à un problème à $n - 1$ variables indépendantes avec $n - 1$ équations à résoudre (obtenues par l'annulation des coefficients des dx_i)...ce qui peut être très compliqué!

Une alternative efficace est d'introduire un paramètre μ qui sera calculé a posteriori (l'ajout d'une variable pour lever une contrainte est assez courant en physique). Voyons deux façons différentes d'introduire cette méthode :

i) *Quel que soit μ , on peut écrire :*

$$df + \mu dg = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i = 0.$$

Maintenant, *choisissons μ tel que*

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0.$$

On se ramène à nouveau à un problème à $n - 1$ variables indépendantes et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Finalement, cette dernière équation est valable pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, comme si toutes les variables x_i étaient indépendantes. Elles ne le sont pas et s'expriment toutes en fonction de μ . Reste à calculer le multiplicateur de Lagrange en remplaçant les x_i dans la contrainte (6).

ii) Adoptons un point de vue géométrique. Au cours d'une promenade en montagne, on cherche le point le plus élevé. Ici $f(x, y)$ est l'altitude du point de coordonnées (x, y) et $g(x, y) = 0$ définit la trajectoire du promeneur qui est imposée.

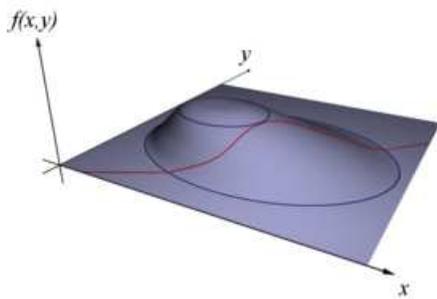


FIG. 5 – La fonction $f(x, y)$ est l'altitude du point de coordonnées (x, y) (sur une carte) et le chemin parcouru d'équation $g(x, y) = 0$ (en rouge) est imposé. Les lignes de niveau $f(x, y) = cte$ sont représentées en bleu.

Aux points où le chemin coupe une ligne de niveau ($f(x, y) = cte$), le chemin est en pente. Un extremum (stationnaire) correspond forcément à un point où le chemin est tangent à une ligne de niveau. Autrement dit, au point extrémal les vecteurs gradients sont colinéaires :

$$\nabla g = \mu \nabla f,$$

où μ est le multiplicateur de Lagrange. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \mu \frac{\partial g}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

On peut bien sûr ajouter des contraintes (en nombre inférieur au nombre de variables).

Illustrons la méthode des multiplicateurs de Lagrange par deux exemples :

- Soit une fonction $f(x, y, z)$ dont on cherche l'extremum avec la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

La fonction est extrémale pour

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0. \quad (8)$$

Et la contrainte impose

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = 0. \quad (9)$$

En exprimant dz en fonction de dx et dy à l'aide de l'équation (9) on a :

$$dz = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} dx - \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} dy$$

que l'on introduit dans l'équation (8) :

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \frac{\partial f}{\partial z}\right)}_{=0} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \frac{\partial f}{\partial z}\right)}_{=0} dy = 0.$$

Et finalement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on introduit le paramètre μ et on recherche l'extrémum de $f + \mu g$ soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

On choisit μ tel que :

$$\mu = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

et on utilise cette expression de μ pour résoudre le système de deux équations restant. On retrouve immédiatement les expressions obtenues par la méthode directe⁵.

- Reprenons l'exemple de la boîte cylindrique. Introduisons le multiplicateur de Lagrange μ . On cherche les extrema de $S + \mu V$. Soit

$$\frac{\partial S}{\partial L} + \mu \frac{\partial V}{\partial L} = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial R} + \mu \frac{\partial V}{\partial R} = 0.$$

⁵Par exemple, on recherche le lieu tel que $f(x, y, z) = x + y + z$ est maximale avec la contrainte $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. On a donc

$$1 + 2\mu x = 0$$

$$1 + 2\mu y = 0$$

$$1 + 2\mu z = 0$$

qui implique $x = y = z = -\frac{1}{2\mu}$ et la contrainte impose la valeur de $\mu : g = 3(-\frac{1}{2\mu})^2 = 1$ soit $x = y = z = \pm 1/\sqrt{3}$ (le signe + donne le maximum de f).

Donc

$$\begin{aligned}2\pi R + \mu\pi R^2 &= 0, \\4\pi R + 2\pi L + 2\mu\pi RL &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}R &= -2/\mu, \\L &= -4/\mu.\end{aligned}$$

On doit donc choisir $L = 2R$. On en déduit μ à l'aide de la contrainte : $V = \pi R^2 L = -16\pi/\mu^3$ donc $\mu = -(\frac{16\pi}{V})^{1/3}$.

Pour résumer : Trouver l'extremum d'une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ à plusieurs variables liées par une contrainte $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, revient à chercher l'extremum de la fonction $f + \mu g$ dont les variables sont supposées indépendantes. Le multiplicateur μ est calculé a posteriori à l'aide de la contrainte. En général, on introduit autant de multiplicateurs de Lagrange qu'il y a de contraintes.

2.2.2 Contraintes de type holonôme

La méthode des multiplicateurs de Lagrange se généralise au cas d'une fonctionnelle à plusieurs variables⁶ : Soit une fonction

$$f(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x), x).$$

Si la contrainte sur les fonctions $y_1, y_2 \dots y_n$ peut s'écrire sous la forme

$$g(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = 0, \quad (10)$$

on dit que la contrainte est holonôme⁷. L'extremum de la fonctionnelle

$$S[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x), x) dx, \quad (11)$$

soumise à la contrainte (10), est obtenu en recherchant l'extremum de la fonctionnelle

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[f(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n, x) - \mu(x)g(y_1, y_2, \dots, y_n) \right] dx.$$

La fonction $\mu(x)$ est déterminée a posteriori par la contrainte (10).

Exemple : Les géodésiques sur la sphère

Quel est le chemin le plus court entre deux points à la surface d'une sphère ?

⁶ Consulter par exemple le chapitre 3.2) de "Mécanique, De la formulation Lagrangienne au chaos hamiltonien" C. Gignoux et B. Silvestre-Brac (EDP Sciences, 2002).

⁷ Un contre-exemple : lorsque la contrainte s'écrit sous la forme d'une inégalité.

Soit une sphère de centre O et de rayon R et deux points A et B placés à sa surface. La position d'un point à la surface de la sphère obéit à la contrainte :

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = R^2, \quad (12)$$

où t est un paramètre (pas forcément le temps). L'arc élémentaire a une longueur

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)dt^2.$$

La longueur du chemin est donc

$$l[x, y, z] = \int_A^B \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

On recherche les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ telle que $l[x, y, z]$ soit minimale avec la contrainte (12). On introduit donc la fonction $\mu(t)$ et on cherche à minimiser l'intégrale $\int_A^B h(x, y, z, x', y', z') dt$ où

$$h(x, y, z, x', y', z') = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - \mu(t)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour la fonction x donne

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -2\mu x = \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial x'} = \frac{d}{dt} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

de même pour y et z . On peut donc écrire :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\mu\mathbf{r}, \quad (13)$$

où \mathbf{u} est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

En prenant le produit vectoriel de l'équation (13) avec \mathbf{r} on obtient

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0}$$

et comme \mathbf{u} et $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ sont colinéaires

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Le vecteur $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ est donc constant entre les points A et B . Les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{u} sont dans le plan équatorial passant par A et B . Le chemin le plus court est donc l'arc de grand cercle (il y a deux chemins, mais un seul est le plus court).

2.2.3 Contraintes de forme intégrale

Dans les problèmes aux variations, la contrainte peut également s'exprimer sous la forme d'une intégrale :

$$C[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} g(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x), x) dx. \quad (14)$$

Comme dans le cas précédent, l'extremum de la fonctionnelle (11) sera obtenu en recherchant l'extremum de la fonctionnelle

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[f(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x) - \mu g(y_1, y_2, \dots, y_n) \right] dx.$$

Le multiplicateur de Lagrange μ (qui n'est pas une fonction, comme dans le cas des contraintes holonômes) est déterminé a posteriori par la contrainte (14).

Exemple 1 : Le problème isopérimétrique

On cherche l'équation $y(x)$ de la courbe sous forme paramétrique $x(t), y(t)$, où t est un paramètre. Un élément de courbe positionné en (x, y) a une longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$. La contrainte sur le périmètre est exprimée sous la forme d'une intégrale :

$$l[x, y] = \oint \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = cte. \quad (15)$$

L'aire que l'on souhaite maximale est donnée par :

$$A[x, y] = \oint y dx = \oint y(t) x'(t) dt, \quad (16)$$

ou encore, en intégrant par parties :

$$A[x, y] = - \oint x(t) y'(t) dt. \quad (17)$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on recherche donc l'extremum de

$$S[x, y] = \oint h_1(y, y', x') dt,$$

où $h_1(y, y', x') = yx' - \mu \sqrt{x'^2 + y'^2}$ ne dépend pas explicitement de t et de x . L'équation d'Euler-Lagrange pour x donné donc ($\frac{\partial h_1}{\partial x} = 0$, variable cyclique) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial h_1}{\partial x'} = 0,$$

donc

$$\frac{\partial h_1}{\partial x'} = y - \mu \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = b, \quad (18)$$

où b est une constante. On pourrait exprimer l'équation d'Euler-Lagrange pour y mais il est plus facile d'utiliser à présent la fonctionnelle (17) et donc $h_2 = -xy' - \mu\sqrt{x'^2 + y'^2}$. L'équation d'Euler-Lagrange pour y donne donc ($\frac{\partial h_2}{\partial y} = 0$, variable cyclique) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial h_2}{\partial y'} = 0,$$

donc

$$\frac{\partial h_2}{\partial y'} = -x - \mu \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = -a, \quad (19)$$

où a est une constante. En multipliant l'équation (18) par $2y'$ et l'équation (19) par $2x'$ on obtient en ajoutant ces deux équations :

$$2(xx' + yy' - ax' - by') = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2 - 2ax - 2by) = 0.$$

Soit

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = (x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2 = c^2,$$

où c est une constante. On trouve bien sur l'équation d'un cercle centré en (a, b) et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. L'intérêt de la paramétrisation est que l'on peut calculer facilement le multiplicateur de Lagrange. En effet, avec $x(t) = a + R \cos t$ et $y(t) = b + R \sin t$, on vérifie que $R = l/2\pi$ et $A = l^2/4\pi$. Il est facile de se convaincre que cet extremum est bien un maximum.

Exemple 2 : La chaînette

On considère un fil pesant inextensible et homogène de masse linéique $\lambda = 1$ et de longueur l attaché à ses deux extrémités en $x = 0$ et en $x = a$. Déterminer sa forme à l'équilibre⁸.

Soit $y(x)$ l'équation de cette forme. On a les conditions aux limites $y(0) = y(a) = 0$ et la contrainte :

$$l = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{constante}. \quad (20)$$

Chaque élément de corde de longueur ds et de masse λds a pour coordonnées $(x, y(x))$. Les coordonnées du centre de gravité sont

$$X_g(y', x) = \frac{1}{l} \int_0^a x \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

et

$$Y_g(y, y') = \frac{1}{l} \int_0^a y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

⁸Cette question a intéressé de nombreux savants comme Galilée, Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens.

La condition d'équilibre impose que le centre de gravité soit le plus bas possible : y_g minimale avec la contrainte (20). En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on recherche donc l'extremum de

$$S[y] = \int_0^a h(y, y') dx,$$

où $h(y, y') = y\sqrt{1+y'^2} + \mu\sqrt{1+y'^2}$ qui est indépendante de x , on peut donc utiliser la formule de Beltrami :

$$h - y' \frac{\partial h}{\partial y'} = (y + \mu)\sqrt{1+y'^2} - (y + \mu) \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

où C est une constante, soit

$$\frac{y + \mu}{\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Donc

$$1 + y'^2 = \left(\frac{y + \mu}{C}\right)^2.$$

Posons $z = \frac{y + \mu}{C}$, on a

$$1 + C^2 z'^2 = z^2 \quad \text{soit} \quad z' = \pm \frac{1}{C} \sqrt{z^2 - 1}.$$

Une solution est de la forme $z = \cosh(\alpha x + \beta)$ avec $\alpha = 1/C$. Donc

$$y(x) = C \cosh\left(\frac{x}{C} + \beta\right) - \mu.$$

Or $y(0) = y(a) = 0$ donc $\beta = -a/2C$ et $\mu = C \cosh\left(\frac{a}{2C}\right)$. Ainsi :

$$y(x) = C \left(\cosh\left(\frac{x - a/2}{C}\right) - \cosh\left(\frac{a}{2C}\right) \right).$$

Reste à déterminer la constante C à l'aide de la contrainte (20) qui donne l'équation implicite :

$$l = 2C \sinh \frac{a}{2C}.$$

On en déduit également

$$X_g = \frac{1}{l} \int_0^a x \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{aC}{l} \sinh \frac{a}{2C} = \frac{a}{2},$$

où on a utilisé l'équation issue de la contrainte. On en déduit

$$Y_g = C \left(1 - \cosh \frac{a}{2C} \right).$$

La forme de la chaînette est donc un cosinus hyperbolique

3 Rudiments de mécanique analytique

3.1 De Newton à Lagrange : une reformulation de la mécanique

L'expérience montre que le mouvement d'un objet ponctuel est complètement déterminé par sa position $q(t)$ et sa vitesse $\dot{q}(t)$ à un instant donné t (on se place pour l'instant dans un espace à une dimension). En effet, l'équation fondamentale de la dynamique fournit l'expression de $\ddot{q}(t)$ en fonction de $q(t)$ et $\dot{q}(t)$:

$$\ddot{q}(t) = f(q(t), \dot{q}(t)).$$

Connaissant les forces qui s'exercent sur le système et donc l'expression de la fonction f , la trajectoire est construite *localement*, de proche en proche, en passant de l'état mécanique à l'instant t à celui en $t + dt$: Ainsi, $\dot{q}(t)$ permet de calculer $q(t + dt)$ et $\ddot{q}(t)$ permet de calculer $\dot{q}(t + dt)$. Le formalisme newtonien est donc basé sur une approche différentielle.

Il existe une autre approche de la mécanique basée sur le *principe de moindre action*⁹ : parmi tous les chemins possibles entre deux points donnés de l'espace, la trajectoire physique (réelle) d'un objet est le chemin qui minimise (ou en général "extrémise") une certaine quantité définie sur toute la trajectoire, appelée *action*. On retrouve une idée très générale en physique qui a le mérite d'être simple et élégante : les lois de la nature obéissent à un *principe d'économie*. Contrairement à l'approche newtonienne, il s'agit donc d'un critère *global* qui caractérise l'ensemble de la trajectoire.

L'enjeu n'est donc pas de trouver de nouvelles lois de la physique, mais de reformuler l'approche newtonienne sous la forme du principe de moindre action. Comment définir l'action de façon à retrouver les équations du mouvement ? Le principe variationnel va nous permettre de répondre à cette question. Au-delà de cette reformulation de la mécanique newtonienne, cette approche a des développements fondamentaux en mécanique quantique, en électromagnétisme, en relativité générale et plus généralement en théorie des champs.

3.2 Le formalisme Lagrangien

3.2.1 Le principe de moindre action

Un objet part d'un point A_1 à l'instant t_1 et arrive au point A_2 à l'instant t_2 . Il existe une infinité de chemins entre ces deux points, pourtant l'objet en choisit un seul, la trajectoire physique (voir la figure 6).

Pour utiliser le principe variationnel, il faut introduire une fonctionnelle qui dépende du chemin $q(t)$, fictif ou réel, suivi par l'objet. Le plus simple est de définir cette fonctionnelle comme une intégrale sur le temps le long du chemin considéré. Il s'agit bien d'une quantité qui caractérise *globalement* le chemin. La

⁹Pierre-Louis de Maupertuis énonce ce principe "si digne de l'Être suprême" en 1744 et Joseph-Louis de Lagrange, en 1787, en donne la formulation complète que nous connaissons aujourd'hui.

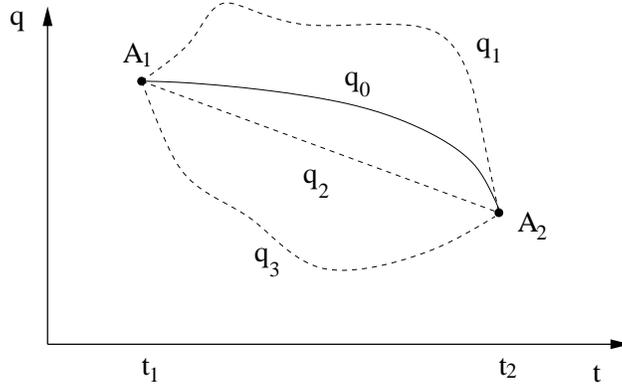


FIG. 6 – Différents chemins $q_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) en fonction du temps t . La trajectoire réelle q_0 représentant un mouvement de chute libre dans le champ de pesanteur est représentée en traits pleins.

fonction à intégrer dépend naturellement du chemin considéré $q(t)$, ainsi que de sa dérivée par rapport au temps $\dot{q}(t)$. Plus généralement, cette fonction peut dépendre explicitement du temps. On définit donc l' *action* par

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (21)$$

où la fonction $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ est appelée le *Lagrangien* du système. Nous verrons plus loin comment écrire cette fonction.¹⁰ Rappelons que la fonction L dépend du temps explicitement, mais aussi implicitement à travers $q(t)$ et $\dot{q}(t)$. La dérivée de L par rapport à t est donc :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}.$$

Pour un chemin donné, tel que $q(t_1)$ et $q(t_2)$ sont fixés, $S[q]$ prend une certaine valeur. D'après le principe de moindre action, la trajectoire physique est le chemin qui donne une valeur minimale¹¹ à l'action. La trajectoire est donc donnée par l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.} \quad (22)$$

Plus généralement, le principe de moindre action implique que la dynamique d'une quantité physique (position d'une particule, valeur d'un champ,...) se

¹⁰Remarquons que le Lagrangien est défini à une fonction près, dépendant seulement du temps, que l'on peut toujours écrire comme une dérivée totale, $\frac{dg(t)}{dt}$, où $g(q, t)$ doit être indépendant de \dot{q} pour que le Lagrangien ne dépende pas de \ddot{q} . La contribution à l'action est donc une constante, $g(t_2) - g(t_1)$, qui ne modifie pas l'extremum obtenu. On appelle cette propriété l'invariance de jauge.

¹¹Il s'agit en général d'un minimum, d'où le nom de principe de *moindre* action, mais dans certain cas l'extremum est un maximum.

déduit d'une unique grandeur, appelée action, qui doit être minimale pour représenter la réalité.

3.2.2 Le Lagrangien

Comment écrire le Lagrangien d'un système ? Considérons pour commencer une particule libre. D'après l'équation fondamentale de la dynamique¹², on doit avoir

$$m\ddot{q} = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = 0. \quad (23)$$

Le Lagrangien d'une particule libre ne dépend a priori que de la vitesse \dot{q} . L'équation d'Euler-Lagrange impose donc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = 0.$$

En comparant avec l'équation fondamentale de la dynamique (23), on peut choisir

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2.$$

Dans le cas où le système est soumis à une force conservative¹³, il est raisonnable d'écrire le Lagrangien sous la forme

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + f(q),$$

où f est une fonction qui ne dépend que de la position. Retrouver l'équation fondamentale de la dynamique à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange impose $f(q) = -U(q)$, où U est l'énergie potentielle d'interaction. Soit :

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q). \quad (24)$$

Ainsi, dans le cas où $U = U(q)$ l'énergie potentielle ne dépend que de la coordonnée q , l'équation d'Euler-Lagrange implique

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

¹²Une méthode alternative est de raisonner à partir des symétries du système (*Mécanique*, L. Landau et E. Lifchitz (Mir, Moscou, 1982)). Par symétrie, le Lagrangien d'une particule libre ne peut dépendre explicitement de sa position q (invariance par translation d'espace), du temps t (invariance par translation du temps) et de la direction de sa vitesse (isotropie de l'espace). C'est donc une fonction de la norme de la vitesse uniquement (qui peut a priori varier au cours du temps). A une dimension on a donc $L = f(\dot{q}^2)$. Le principe de relativité de Galilée impose ensuite la forme du Lagrangien.

¹³L'utilisation exclusive de forces conservatives en mécanique analytique peut sembler être un handicap, mais la dissipation de l'énergie n'intervient que de façon effective pour des systèmes macroscopiques. Sur le plan fondamental, pour des systèmes microscopiques étudiés dans le cadre de la physique quantique, cette restriction ne pose pas de problème. Il est néanmoins possible de prendre en compte des frottements modélisés par $f = -\mu\dot{q}$, en utilisant la notion de force généralisée.

D'une façon générale, on écrira le Lagrangien comme

$$\boxed{L = T - U,}$$

où T est l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle.

Dans le cas d'un système constitué de N particules dans un espace à trois dimensions, on introduira les *coordonnées généralisées* q_i , où $i = 1, 2, \dots, 3N$ et les vitesses correspondantes \dot{q}_i . En coordonnées cartésiennes on a donc $q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $q_3 = z_1$, $q_4 = x_2$, $q_5 = y_2$, ... où (x_j, y_j, z_j) sont les coordonnées spatiales de la j^{eme} particule¹⁴. Mais selon les symétries du système, les coordonnées généralisées peuvent aussi être des angles (coordonnées sphériques ou polaires) comme on le voit dans les deux exemple ci-dessous.

Finalement, le Lagrangien du système s'écrit :

$$L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - U(q_1, q_2, \dots, q_{3N}).$$

On a alors $3N$ équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, 3N.$$

Exemple 1 : La particule libre (en coordonnées polaires)

Il n'est bien sûr pas naturel d'étudier un mouvement rectiligne uniforme en coordonnées polaires, mais cet exemple montre bien que le traitement d'un problème de mécanique à l'aide de coordonnées généralisées est indépendant du système de coordonnées choisi.

On a vu que le Lagrangien d'une particule libre s'écrit $L = \frac{1}{2}mv^2$, où v est la vitesse de la particule. Soit en coordonnées polaires :

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2).$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour les coordonnées $q_1 = r$ et $q_2 = \theta$ impliquent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = \frac{\partial L}{\partial r} = mr^2\dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

¹⁴Une contrainte sur les coordonnées réduit le nombre de degrés de liberté. Par exemple, une particule qui se déplace à la surface d'une sphère n'a que deux degrés de liberté. Compte tenu de la symétrie, on choisira les angles $q_1 = \theta$ et $q_2 = \phi$ plutôt que les coordonnées cartésiennes. En général s'il y a m contraintes, il y a $3N - m$ degrés de liberté (c'est-à-dire de coordonnées indépendantes qui fixent la position du système).

A l'aide d'un changement de variables, il est possible de montrer que la trajectoire est une droite (en coordonnées polaires) et que le vecteur vitesse est constant (la deuxième équation montre la conservation du moment cinétique).

Exemple 2 : Le pendule

Considérons par exemple un pendule de longueur l décrit par l'angle θ (une dimension). Son Lagrangien est $(U(\theta) = -mgl \cos \theta$, où θ est l'angle avec la verticale) :

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta,$$

et l'équation d'Euler-Lagrange implique :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta}.$$

On retrouve l'équation du mouvement du pendule $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$. On voit que contrairement à la résolution du problème par la mécanique newtonienne, la tension du fil n'intervient pas explicitement (la contrainte est prise en compte simplement avec $r = l$) et il n'y a pas d'équations vectorielles à projeter, mais seulement des grandeurs scalaires.

3.3 Le formalisme hamiltonien

3.3.1 Les équations de Hamilton

Si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) :

$$\sum_i^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (25)$$

est une constante du mouvement d'après la formule de Beltrami¹⁵.

Dans le cas d'une force conservative (à une dimension), on voit que :

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q)$$

¹⁵Pour le montrer à nouveau dans le cadre de la mécanique analytique :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i^{3N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] \\ &= \sum_i^{3N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\dot{q}_i) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \end{aligned}$$

Le Lagrangien n'est donc pas une constante du mouvement en général.

est une constante du mouvement, c'est-à-dire une variable dynamique (qui dépend des coordonnées généralisées) qui ne varie pas au cours du mouvement. On reconnaît bien sûr l'énergie du système.¹⁶ C'est donc parce que le Lagrangien ne dépend pas *explicitement* du temps que l'énergie est conservée au cours du mouvement.

De plus, ce résultat suggère l'utilisation d'une autre fonction que le Lagrangien pour déduire les équations du mouvement. On définit le *moment conjugué* (ou *impulsion généralisée*) p_i associé à la coordonnée q_i par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (26)$$

En général le moment conjugué est l'impulsion $p_i = m\dot{q}_i$ (cas des N particules ponctuelles). Mais lorsque la coordonnée généralisée q_i est un angle, son moment conjugué est un moment cinétique. Ainsi, dans le cas du pendule de longueur l décrit par l'angle θ . Le moment conjugué de θ est $p_\theta = ml^2\dot{\theta}$, c'est-à-dire son moment cinétique. Nous verrons en exercice le cas particulier d'une particule chargée dans un champ électromagnétique, pour lequel le moment conjugué n'est pas égal à la quantité de mouvement de la particule.

Si le Lagrangien ne dépend pas explicitement de la variable q_i on dit que cette variable est *cyclique* ($\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$) et d'après les équations d'Euler-Lagrange son moment conjugué est une constante du mouvement ($p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = cte$) : Une propriété de *symétrie* (invariance par une certaine transformation) est donc liée à la *conservation* d'une grandeur physique associée. Nous avons déjà rencontré le cas d'une particule libre : le Lagrangien ne dépend pas de la position et l'impulsion $p = m\dot{q}$ est conservée. Dans le cas d'un mouvement à force centrale (en coordonnées polaires à 2 d) le Lagrangien est par symétrie indépendant de l'angle θ :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + \frac{A}{r}.$$

L'impulsion généralisée $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$, c'est-à-dire le moment cinétique, est conservée.

A partir de l'expression (25), définissons une nouvelle fonction appelée *Hamiltonien* et notée H :

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i p_i - L = T + U. \quad (27)$$

Le Hamiltonien se confond avec l'énergie du système dans le cas de forces conservatives (et si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) et dans le cas de la force de Lorentz comme nous le verrons en exercice.

¹⁶On retrouve également l'énergie mécanique dans le cas d'une particule chargée dans un champ électromagnétique comme nous le verrons en exercice.

Reste à trouver les équations du mouvement à partir de cette nouvelle fonction. Pour cela différencions H et utilisons l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{3N} [\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right)}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i}] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{3N} [\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i] - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

On voit que les variables naturelles du Hamiltonien sont les coordonnées q_i et leurs moments conjugués p_i . On en déduit les équations de Hamilton :

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, 3N.} \quad (28)$$

Comme les $3N$ équations du second ordre d'Euler-Lagrange, les $6N$ équations du premier ordre de Hamilton permettent d'exprimer les équations du mouvement.¹⁷ Par ailleurs,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ainsi, le Hamiltonien d'un système de N particules soumises à des forces conservatives s'écrit :

$$H(\{q_i, p_i\}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + U(q_1, q_2, \dots, q_{3N}).$$

Les équations de Hamilton impliquent pour $i = 1, 2, \dots, 3N$:

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i,$$

où F_i est la composante de la force associée à la coordonnée q_i . En pratique, on écrit le Lagrangien du système en fonction des q_i et des \dot{q}_i , on calcule les moments conjugués p_i , on en déduit le Hamiltonien en fonction des q_i et des p_i , et on résout les équations de Hamilton.

Remarquons que le formalisme de Hamilton est indépendant de celui de Lagrange. En effet, on peut définir l'action directement à l'aide du Hamiltonien, la condition de stationnarité impose alors les équations de Hamilton. En définissant l'action comme

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i, p_i\}) \right) dt,$$

¹⁷Mais il est, en général, plus simple de résoudre (analytiquement ou numériquement) des équations différentielles du premier ordre que du deuxième.

on a

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i (\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i) - \delta H \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \frac{d\delta q_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\underbrace{(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i})}_{0} \delta p_i - \underbrace{(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i})}_{0} \delta q_i \right) dt + \underbrace{\sum_i [p_i \delta q_i]_{t_1}^{t_2}}_0 = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a intégré par parties le terme en $p_i \frac{d\delta q_i}{dt}$ et le terme entre crochets est nul, car $\delta q_i = 0$ en t_1 et en t_2 . Pour que l'action soit stationnaire ($\delta S = 0$), les variables q_i et p_i étant indépendantes, on retrouve les équations de Hamilton.

Reprenons l'exemple du pendule de longueur l décrit par l'angle θ (une dimension). Son Hamiltonien est :

$$H = p_\theta \dot{\theta} - L = ml^2 \dot{\theta}^2 - \left(\frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \right) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta.$$

Les équations de Hamilton impliquent :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

et

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta$$

et on retrouve l'équation du mouvement.

Le portrait de phase

Dans le formalisme de Hamilton, on travaille avec les coordonnées généralisées et les impulsions généralisées, les premières étant indépendantes des secondes. La dynamique d'un système est alors décrite dans l'*espace des phases* : l'espace à $6N$ dimensions (pour N particules qui évoluent dans un espace à trois dimensions) dont les coordonnées sont les $3N$ coordonnées généralisées q_i et les $3N$ moments conjugués p_i . Le *portrait de phase* est alors la représentation de la dynamique du système dans l'espace des phases pour une énergie donnée E . Puisque la trajectoire dans l'espace des phases est déterminée par les équations de Hamilton et les conditions initiales, deux trajectoires ne peuvent pas se couper.

Dans le cas du pendule simple, l'espace des phases a deux dimensions : $q = \theta$ et $p = p_\theta$. Et le portrait de phase est donné par :

$$p = \pm \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos q)}.$$

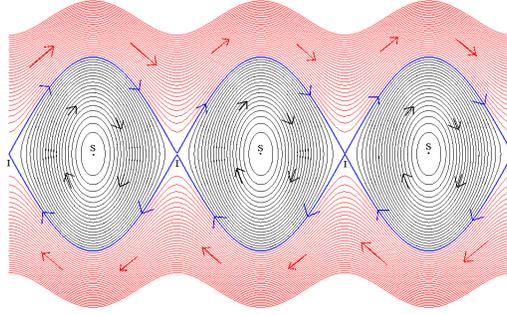


FIG. 7 – Le portrait de phase du pendule simple, avec les trajectoires ouvertes de hautes énergies (en rouge) et les trajectoires fermées de basses énergies (en noir).

On distingue deux cas selon la valeur de l'énergie :

- si $-mgl < E < mgl$: le mouvement n'est possible que pour des angles compris dans un certain intervalle qui augmente avec l'énergie (libration ou oscillations libres).
- si $mgl < E$: le mouvement est possible quelle que soit la valeur de l'angle (rotation).

3.3.2 Les crochets de Poisson

Considérons une grandeur physique f dépendant des $3N$ coordonnées q_i et des $3N$ moments conjugués p_i . Sa dérivée totale par rapport au temps est donnée par

$$\frac{df}{dt}(\{q_i, p_i\}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right).$$

D'après les équations de Hamilton,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \quad (29)$$

où l'on a introduit les crochets de Poisson de f avec H . En général, les crochets de Poisson de deux fonctions f et g s'écrivent ¹⁸:

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right).$$

Les équations de Hamilton s'écrivent alors de façon symétrique :

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, 3N.$$

¹⁸On montre facilement que les crochets de Poisson sont antisymétriques ($\{f, g\} = -\{g, f\}$) et qu'ils vérifient donc l'identité de Jacobi : $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$.

Les crochets de Poisson permettent donc de déterminer directement la dynamique d'une grandeur f et d'associer des propriétés de symétrie et de conservation. Ainsi, d'après l'équation (29), une quantité physique f qui ne dépend pas explicitement du temps est conservée si $\{f, H\} = 0$.

Pour ouvrir une porte sur la mécanique quantique, les crochets de Poisson sont à l'origine de la quantification et du *commutateur* entre deux opérateurs. Ainsi, les crochets de Poisson

$$\{q, p\} = 1,$$

annonce la relation fondatrice de la mécanique quantique¹⁹ :

$$[q, p] = i\hbar,$$

où $\hbar = h/2\pi$, h est la constante de Planck.

3.4 Conclusion

La dynamique d'un système peut être étudiée à l'aide de différentes approches qui donnent les mêmes équations du mouvement. Considérons le cas général d'un système constitué de N particules évoluant dans un espace à trois dimensions. L'approche newtonienne repose sur le concept de force et sur la résolution de N équations vectorielles différentielles du 2eme ordre (et de $6N$ conditions initiales). Le formalisme lagrangien s'inscrit dans le cadre plus large du principe variationnel. Les $3N$ équations d'Euler-Lagrange sont également des équations différentielles du deuxième ordre, mais elles s'expriment en fonction de coordonnées généralisées q_i et de vitesses généralisées \dot{q}_i . L'approche hamiltonienne, bien qu'elle soit indépendante de l'approche lagrangienne,²⁰ repose sur le même principe de moindre action et sur la résolution de $6N$ équations différentielles du premier ordre qui s'expriment simplement à l'aide des crochets de Poisson.

L'avantage de ces approches est qu'elles permettent non seulement de tenir compte des contraintes sans introduire de force supplémentaire (réaction du support, liaisons...), mais également de travailler avec des équations dont la forme est indépendante du choix du système de coordonnées. Ce cadre unificateur qui abandonne le concept de force, propre à la mécanique classique, a permis une reformulation de la mécanique quantique en terme d'intégrales de chemin par Richard Feynman et le développement de la théorie des champs et de la théorie du chaos.

¹⁹On consultera avec profit *Mécanique quantique, 1. Fondements et premières applications*, C. Aslangul (de Boeck, Bruxelles, 2007).

²⁰En général il est plus facile d'écrire un Lagrangien qu'un Hamiltonien à l'aide des symétries du système étudié. Quitte à utiliser ensuite le formalisme Hamiltonien. Il n'est pas toujours possible de déduire le moment conjugué du Lagrangien et donc d'écrire le Hamiltonien d'un système (par exemple dans le cas de l'électrodynamique classique).

3.5 Exercices

3.5.1 L'oscillateur harmonique

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique (classique) à une dimension s'écrit

$$U(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

- 1) En déduire l'équation du mouvement à l'aide du formalisme lagrangien.
- 2) En déduire l'équation du mouvement à l'aide du formalisme hamiltonien.
- 3) Montrer à l'aide des équations de Hamilton que le Lagrangien suivant décrit le mouvement d'un oscillateur amorti :

$$L = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(\dot{q}^2 - \omega^2q^2).$$

Réponse :

- 1) Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

Et d'après l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

donc

$$-m\omega^2q = m\ddot{q}.$$

- 2) Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

Les équations de Hamilton donnent

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -m\omega^2q.$$

On en déduit l'équation du mouvement :

$$\ddot{q} + \omega^2q = 0.$$

- 3) Le moment conjugué s'écrit $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}e^{\alpha t}$ donc

$$H = \frac{1}{2}p^2e^{-\alpha t} + \frac{1}{2}\omega^2q^2e^{\alpha t}.$$

Les équations de Hamilton donnent

$$\dot{q} = pe^{-\alpha t} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\omega^2 q e^{\alpha t}.$$

On en déduit l'équation du mouvement :

$$\ddot{q} + \omega^2 q + \alpha \dot{q} = 0.$$

3.5.2 Le cerceau à vitesse angulaire constante

Une bille glisse sans frottement le long d'un cerceau de rayon R animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à vitesse angulaire ω constante. La position de la bille sur le cerceau est déterminée par un seul degré de liberté, l'angle θ avec la verticale. La position du cerceau est elle décrite par l'angle ϕ (voir la figure 8).

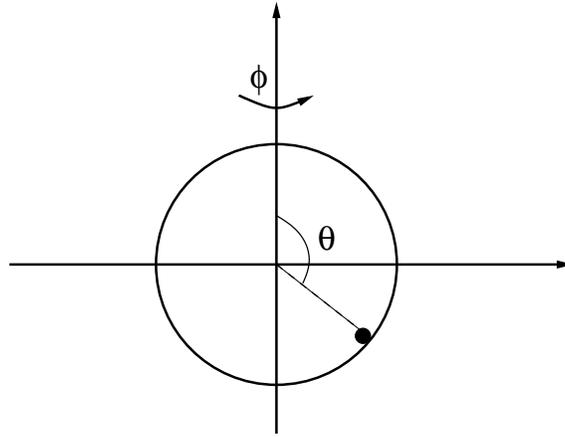


FIG. 8 – La bille sur le cerceau en rotation.

- 1) Écrire le Lagrangien de ce système et en déduire l'équation du mouvement.
- 2) Écrire le Hamiltonien du système et en déduire à nouveau l'équation du mouvement.
- 3) Montrer que la bille est soumise à un potentiel effectif $V(\theta)$ dont on étudiera le comportement en fonction de θ . On posera $\omega_0 = \sqrt{g/R}$.
- 4) Quel est le comportement de la bille pour des vitesses de rotation lente ($\omega < \omega_0$) ?
- 5) Même question dans le cas de la rotation rapide ($\omega > \omega_0$).

Réponse :

1) En coordonnées sphériques, la position de la bille est donc déterminée par R , $\theta(t)$ et $\phi(t)$. Sa vitesse est donc $R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$, avec $\dot{\phi} = \omega$. Son énergie

potentielle est $U(\theta) = mgR \cos \theta$. On en déduit le Lagrangien du système :

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta.$$

On en déduit à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}},$$

soit

$$mR^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) = mR^2\ddot{\theta},$$

donc

$$R\omega^2 \sin \theta \cos \theta + g \sin \theta = R\ddot{\theta}.$$

A l'aide de l'équation fondamentale de la dynamique projetée sur \vec{e}_θ pour éliminer la réaction du cerceau sur la bille et en tenant compte de la force centrifuge de norme $m\omega^2 R \sin \theta$ on aurait bien :

$$mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta + (m\omega^2 R \sin \theta) \cos \theta.$$

2) Le moment conjugué de θ s'écrit :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta},$$

donc

$$H = \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 - \omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta.$$

D'après les équations de Hamilton :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

et

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta.$$

On retrouve bien sûr l'équation du mouvement.

3) D'après le Hamiltonien :

$$V(\theta) = \frac{1}{2}mR^2(2\omega_0^2 \cos \theta - \omega^2 \sin^2 \theta).$$

La fonction est symétrique par rapport à π ($V(\pi - \theta) = V(\pi + \theta)$). Et

$$\frac{dV}{d\theta} = -mR^2 \sin \theta (\omega_0^2 + \omega^2 \cos \theta).$$

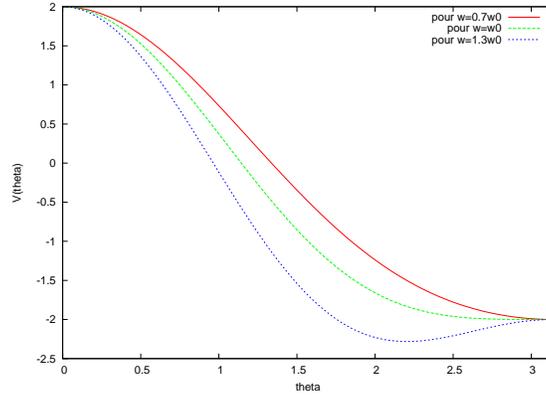


FIG. 9 – Le potentiel $V(\theta)$ entre 0 et π .

Entre 0 et π , la dérivée est négative si $\omega_0^2 + \omega^2 \cos \theta > 0$, donc si

$$\cos(\theta) > -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

4) Dans le cas d'une rotation lente ($\omega < \omega_0$), cette condition est remplie quelle que soit la valeur de θ . La dérivée est donc négative pour tout θ et s'annule en 0 (équilibre instable) et en π (équilibre stable), en bas du cerceau. Au voisinage de ce point d'équilibre, la bille a un mouvement harmonique avec la pulsation $\omega_l = \omega \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}$. En effet :

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -mR^2(\omega_0^2 \cos \theta + \omega^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{d^2V}{d\theta^2} \Big|_{\pi} = \frac{1}{2} mR^2 \omega_l^2.$$

5) Dans le cas d'une rotation rapide ($\omega > \omega_0$), cette condition est remplie si $\theta < \theta_s$ tel que $\cos(\theta_s) = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. L'angle θ_s est donc un point d'équilibre (stable) et 0 et π deviennent des points d'équilibre instables. En ce point, l'énergie potentielle vaut

$$V(\theta_s) = -\frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \left(1 + \frac{\omega_0^4}{\omega^4}\right).$$

La bille a un mouvement oscillant autour de l'angle θ_s avec la pulsation $\omega_r = \omega \sqrt{1 - \frac{\omega_0^4}{\omega^4}}$. Quand $\omega \rightarrow \infty$, $\theta_s \rightarrow \pi/2$.

3.5.3 L'atome hydrogénoïde

On considère l'électron d'un atome hydrogénoïde²¹ subissant l'effet du potentiel central :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (30)$$

- 1) Donner l'expression du Lagrangien de ce système en coordonnées sphériques.
- 2) Établir les équations de Lagrange dans ce même système de coordonnées.
- 3) En déduire l'existence de quantités conservées. Interpréter.
- 4) Écrire le Hamiltonien de ce système et les équations de Hamilton.

Réponse :

1) On a $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \triangleq \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Z\tilde{e}^2}{r}$ dont on note qu'il est invariant par rotation. On a introduit une charge effective pour simplifier les notations

En coordonnées sphériques on a : $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$ et $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{u}_\varphi$
d'où :

$$L(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{Z\tilde{e}^2}{r}. \quad (31)$$

2) D'après l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (32)$$

on a, pour les coordonnées r , θ et φ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (m\dot{r}) = m (r\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \frac{Z\tilde{e}^2}{r^2} \\ \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \\ \frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0. \end{cases} \quad (33)$$

3) On déduit immédiatement des équations précédentes que la quantité $mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ est conservée. La conservation de cette grandeur est liée au fait que le Lagrangien est indépendant de la variable angulaire φ . Elle traduit donc l'invariance par rotation du système autour de l'axe Oz . Vérifions que la quantité conservée est la projection du moment angulaire sur l'axe Oz .

On a $\mathbf{J} = \mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{r}}$ et $J_z = \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_z$ où \mathbf{u}_z est donné par : $\mathbf{u}_z = \cos \theta \mathbf{u}_r - \sin \theta \mathbf{u}_\theta$
d'où : $J_z = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$.

²¹Un atome hydrogénoïde est un atome auquel on a arraché tous ses électrons sauf un. Il se comporte donc comme un atome d'hydrogène avec un noyau de charge $Z > 1$.

L'invariance complète par rotation du système implique que les autres composantes J_x et J_y sont aussi conservées. C'est la dissymétrie du système de coordonnées qui privilégie l'axe Oz et, par conséquent, la composante J_z du moment cinétique. Mais comme le choix de l'axe Oz est arbitraire la conservation de J_i vaut pour tout $i = x, y$ ou z .

4) Calculons d'abord les moments conjugués :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques, le moment conjugué est donc différent de l'impulsion $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Le Hamiltonien du système s'écrit donc

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\varphi}p_\varphi - L \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - \left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{Z\tilde{e}^2}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \frac{Z\tilde{e}^2}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{Z\tilde{e}^2}{r}. \end{aligned}$$

Les équations de Hamilton sont :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2 \theta} - \frac{Z\tilde{e}^2}{r^2} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad \text{et} \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta} \quad \text{et} \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

En utilisant les expressions des moments conjugués, on retrouve bien les équations du mouvement obtenues à l'aide du formalisme lagrangien.

3.5.4 La particule plongée dans un champ électromagnétique

On considère le Lagrangien d'une particule de masse m et de charge q plongée dans un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) décrit par le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{r}, t)$ et vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\phi(\mathbf{r}, t). \quad (34)$$

1) Déterminer l'équation du mouvement de la particule.

- 2) Déterminer le Hamiltonien de la particule.
- 3) En déduire les équations de Hamilton.

Réponse :

1) On a :

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\phi(\mathbf{r}, t) \quad (35)$$

où l'on note que \mathbf{A} et ϕ font intervenir, via leurs arguments, la position de la particule.

On en tire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = q \frac{\partial A_j(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \dot{x}_j - q \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \end{array} \right. \quad (36)$$

et :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = m\ddot{x}_i + q \left(\frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} \dot{x}_j \right) \quad (37)$$

avec sommation sous-entendue sur l'indice répété (j). L'équation du mouvement de la particule est alors donnée par :

$$m\ddot{x}_i = -q \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} - q \left(\frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} \dot{x}_j - \frac{\partial A_j(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \dot{x}_j \right). \quad (38)$$

On montre à la fin de cet exercice que l'on retrouve bien l'équation usuelle de la particule chargée dans un champ électromagnétique :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) . \quad (39)$$

2) On détermine d'abord le moment conjugué p_i . On a :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{r}, t) \quad (40)$$

d'où :

$$\dot{x}_i(x_j, p_j) = \frac{p_i}{m} - \frac{qA_i(\mathbf{r}, t)}{m} . \quad (41)$$

On remarque que le moment conjugué est différent de l'impulsion $p_i = m\dot{x}_i$. Le Hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{x}_i - L(x_i, \dot{x}_i(x_j, p_j), t) \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{q}{m} \sum_i p_i A_i - \frac{1}{2}m \sum_i \left(\frac{p_i}{m} - \frac{qA_i}{m} \right)^2 - q \sum_i A_i \left(\frac{p_i}{m} - \frac{qA_i}{m} \right) + q\phi \end{aligned} \quad (42)$$

où l'on a, cette fois, explicité les sommes (sur l'indice i). On a, en simplifiant l'expression précédente :

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi \quad (43)$$

où l'on remarque que l'impulsion de la particule \mathbf{p} est remplacée par $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$.

3) Les équations de Hamilton sont données par : $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ et $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ soit, de façon explicite :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) \right] = -\frac{q}{m} (p_k - qA_k) \frac{\partial A_k}{\partial x_i} + q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (44)$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} (p_i - qA_i) . \quad (45)$$

Montrons à présent que l'équation du mouvement (38) est bien l'équation usuelle de la particule chargée dans un champ électromagnétique :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) . \quad (46)$$

Le champ électrique \mathbf{E} vérifie :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{A}) \quad (47)$$

\mathbf{A} étant le potentiel vecteur.

On a donc :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \quad (48)$$

et la composante E_i du champ électrique est donnée par :

$$E_i = -\frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \quad (49)$$

qui correspond bien (à la charge q près) aux deux premiers termes du second membre de l'expression (38). La composante i du produit vectoriel $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ est donnée par :

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k \quad (50)$$

où, de nouveau, la sommation sur les indices répétés (j et k) est sous-entendue. Le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ϵ_{ijk} est défini par : $\epsilon_{123} = 1$ ainsi que toute permutation circulaire de ces indices : $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$. L'antisymétrie implique : $\epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1$ et $\epsilon_{iik} = \epsilon_{ijj} = \epsilon_{iii} = \text{etc} = 0$.

Finalement une propriété importante de ce tenseur est :

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) \quad (51)$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker. Comme \mathbf{B} est un rotationnel $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ sa composante B_k est donnée par :

$$B_k = \epsilon_{klm} \partial_l A_m. \quad (52)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \dot{x}_j \partial_l A_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \dot{x}_j \partial_l A_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \dot{x}_j \partial_l A_m = \dot{x}_j \partial_i A_j - \dot{x}_j \partial_j A_i \\ &= - \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \right) \end{aligned} \quad (53)$$

qui sont bien les troisième et quatrième termes figurant dans le second membre l'expression (38).