Introduction à la Physique Statistique LP357
2008-2009

Contrôle continu

Mercredi 29 avril 2009

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés pendant l'épreuve.

1 Le cristal d'hydrogène dans l'ensemble microcanonique

Un cristal d'hydrogène est constitué de N molécules H_2, discernables et faiblement couplées. Le cristal est isolé dans une enceinte adiabatique. Une molécule de dihydrogène peut se trouver dans l'un des quatre états électroniques suivants :

- l'état "parahydrogène" noté (1) d'énergie $\epsilon_1 = 0$,
- les trois états "orthohydrogène" noté (2), (3) et (4) d'énergie $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \Delta$.

On note n_i le nombre de molécules dans l'état i.

▷ **1-1** Donner l'expression de l'énergie E du cristal en fonction de n_1.

▷ **1-2** Calculer l'entropie microcanonique dans le cas $N, n_1, N - n_1 \gg 1$.

▷ **1-3** En déduire la température T du système et exprimer l'énergie en fonction de T. Commenter le comportement de E à basse et à haute températures.

▷ **1-4** Calculer la chaleur spécifique C. Quelle est la limite de C à haute température ? Pourquoi ne retrouve-t-on pas la loi de Dulong et Petit ($C \simeq 3Nk$) ?

▷ **1-5** Exprimer la fonction de partition canonique en fonction du nombre de microétats accessibles à l'énergie E. Déduire de la question **1-2** la fonction de partition du système à la température T. En déduire l'énergie moyenne. Conclusion.

2 La paroi adiabatique et mobile

Nous allons nous intéresser aux propriétés d'un système isolé constitué de deux gaz parfaits séparés par une paroi adiabatique et mobile (voir la figure 1).

2.1 Le gaz parfait

On considère un gaz parfait *classique* constitué d'un nombre *macroscopique* N d'atomes de masse m indiscernables enfermés dans une enceinte de volume V, isolée de l'extérieur. L'énergie totale du gaz est notée E.

▷ **2-1** Calculer l'entropie de ce gaz.

On donne le volume de l'hypersphère de rayon R en dimension n :

$$\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \leq R^2} dx_1 \ldots dx_n = \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} R^n \quad (n \text{ entier non nul}) .$$

▷ **2-2** En déduire la température et la pression. Montrer qu'au cours d'une transformation le changement d'entropie du gaz est donné par

$$\frac{\Delta S}{Nk} = \frac{5}{2} \ln \frac{V^f}{V^i} + \frac{3}{2} \ln \frac{P^f}{P^i},$$

où P^i, P^f, V^i et V^f sont respectivement les pressions et les volumes initiaux et finals.

2.2 La condition d'équilibre

Deux gaz parfaits G_1 et G_2, constitués chacun de N atomes de masse m, sont localisés dans les deux parties d'une enceinte isolée de l'extérieur, de volume total V. La paroi séparant les deux gaz est *adiabatique et se déplace sans frottement.* On notera V_1 et V_2 les volumes respectifs de G_1 et G_2 et E_1 et E_2 leurs énergies respectives. L'énergie totale des deux gaz est notée E.

FIG. 1 – Deux gaz parfaits séparés par une paroi adiabatique et mobile.

▷ **2-3** Quelles sont les variables internes des deux gaz ? Donner les relations qui lient les variables internes de G_1 à celles de G_2.

▷ **2-4** Montrer que l'équilibre correspond non seulement au maximum de l'entropie totale S des deux gaz, mais aussi au maximum de chacune des entropies S_1 et S_2.

▷ **2-5** En déduire la condition d'équilibre. Que peut-on dire des températures à l'équilibre ?

2.3 La détermination de l'état final

Supposons qu'initialement, la paroi étant fixée, les deux gaz sont à la même température $T_1^i = T_2^i = T_0$ et que le rapport des volumes est $\frac{V_2^i}{V_1^i} = r$.

▷ **2-6** Quel est le rapport des pressions initiales $\frac{P_2^i}{P_1^i}$?

On relâche la paroi et on note R le rapport des volumes dans l'état d'équilibre final : $\frac{V_2^f}{V_1^f} = R$.

▷ **2-7** Décrire qualitativement l'évolution du système à partir de l'état initial. Quels phénomènes lui permettent d'atteindre un état d'équilibre ?

▷ **2-8** Donner les rapports des pressions $\frac{P_2^f}{P_1^f}$ et des températures $\frac{T_2^f}{T_1^f}$ dans l'état final.

▷ **2-9** Calculer les rapports $\frac{V_1^f}{V_1^i}$, $\frac{P_1^f}{P_1^i}$ et $\frac{T_1^f}{T_1^i}$ en fonction de r et R. En déduire que seule la pression est déterminée par les grandeurs thermodynamiques initiales.

▷ **2-10** Exprimer la variation d'entropie totale ΔS des deux gaz entre l'état initial et l'état d'équilibre final en fonction de r et R.

▷ **2-11** La transformation étant irréversible quel est le signe de ΔS ? Montrer que l'on a alors :

$$\frac{R}{(1+R)^2} > \frac{1}{f(r)}$$

où $f(r)$ est une fonction de r que l'on déterminera. Cette inégalité est-elle vérifiée quelle que soit la valeur de r ? Interpréter, sans les calculer explicitement, les valeurs de R correspondantes. A quelle condition la transformation est-elle réversible ?