Physique statistique – TD 7
Le rayonnement du corps noir

CPES – L3

Connaître le spectre d'énergie rayonné par un objet « chaud » (soleil, flamme, corps humain, etc.) est un problème important historiquement. Le cas le plus classique est celui du corps noir, c'est à dire d'un objet dont on suppose qu'il ne réfléchit pas la lumière et émet uniquement par emission spontannée. La loi de Stefan-Boltzmann et les lois de Wien ont été établies empiquement à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Un succès majeur de la mécanique statistique a été la détermination théorique du spectre d'emission du corps noir, duquel on déduit les résultats précédents, par Plank en 1900 [1].

Dans ce TD on propose de retrouver ces résultats en suivant la présentation du cours d'Éric Brunet [2]. On considère d'abord une cavité remplie de photons (réalisation d'un corps noir), puis on en déduit les lois relatives à l'emission spontannée de lumière.

1 Énergie du corps noir

On considère une cavité de volume $V = L^3$, à température T dans lequel sont présents des photons. Les photons n'interagissent pas entre eux.

On rappelle qu'un photon peut être décrit par une onde de vecteur d'onde $\vec{k}$. Sa quantité de mouvement est $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, et son énergie est $\epsilon = \|\vec{p}\|c$.

1. Expliquer pourquoi l'état d'un photon est décrit par trois nombres quantiques n_x, n_y, n_z. En plus de celà, on admet que le photon possède une polarisation $\alpha = \pm 1$ (il « tourne » vers la gauche ou vers la droite).
2. Quelle forme devrait prendre la fonction de partition pour N photons indiscernables ?

Le problème ici est que le nombre total de photons n'est pas fixé. Celà nous amène à changer de perspective : au lieu de décrire le système par l'état de chaque photons, on considère plutôt chaque état quantique possible $\Theta = (n_x, n_y, n_z, \alpha)$ (d'énergie ϵ_Θ) et le nombre de photons n_Θ dans cet état.

3. En se rappelant que les photons sont indépendants, écrire l'énergie du système comme une somme sur les états quantiques Θ.
4. Montrer que la fonction de partition Z s'exprime alors comme des sommes sur les nombres d'occupations des états, puis qu'elle se factorise sur les différents états : $Z = \prod_\Theta z_\Theta$.
5. On appelle $\bar{n}_\Theta$ le nombre moyen de photons dans l'état Θ. Montrer que l'énergie moyenne dans l'état Θ est :
$$\bar{n}_\Theta \epsilon_\Theta = -\frac{\partial \ln z_\Theta}{\partial \beta}. \tag{1}$$
6. Calculer z_Θ et $\bar{n}_\Theta$.
7. Expliquer, à partir de la quantification définie en question 1, pourquoi la somme sur les états quantiques peut se réécrire comme une intégrale sur les impulsions $\vec{p}$:
$$\sum_{\text{États }\Theta} \cdots \Leftrightarrow 2 \iiint \frac{V d^3\vec{p}}{h^3} \cdots \tag{2}$$
8. En déduire l'expression de l'énergie totale moyenne $E = \sum_\Theta \bar{n}_\Theta \epsilon_\Theta$. L'exprimer comme une intégrale sur p (la norme de l'impulsion). (Aide : Que vaut ϵ_Θ en fonction de $\vec{p}$?)

1. Article de Plank : `http://www.lawebdefisica.com/arts/distributionlaw.pdf`
2. `http://www.lps.ens.fr/~ebrunet/PhyStat.pdf`

9. Par un changement de variable, écrire une intégrale sur la fréquence ν, puis sur la longueur d'onde λ. Ce sont les formules données par Planck en 1900! Donner leur interprétation.
10. Démontrer l'expression de l'énergie volumique : (regarder la section Données pour la valeur de l'intégrale)

$$e \equiv \frac{E}{V} = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{15(\hbar c)^3}. \tag{3}$$

2 Loi de Stefan-Boltzmann

L'objet que l'on considère est un « corps noir », c'est à dire un objet qui ne réfléchit aucun photon venant de l'extérieur. Le rayonnement émis est donc uniquement dû à l'emission spontannée de photons. Dans le cas de la cavité étudiée à la question précédente, la paroi doit être à l'équilibre thermodynamique : elle émet donc autant de photons, et aux mêmes fréquences, qu'elle n'en a reçu depuis l'intérieur.

On cherche à retrouver la loi de Stefan-Boltzmann : une petite surface dS d'un corps noir rayonne, pendant un temps dt, une énergie dE_{ray} proportionnelle à la puissance 4 de la température :

$$dE_{\text{ray}} = \sigma T^4 \, dS \, dt \qquad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} = 5,67\,10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}} \tag{4}$$

On suppose que $dS \ll c\,dt$ de sorte que les photons (à l'intérieur de la cavité) qui vont impacter la surface pendant dt sont situés dans une demi-sphère de rayon $c\,dt$. On utilise des coordonnées polaires (r, θ, ϕ) selon l'axe perpendiculaire à la surface.

1. On considère un petit volume $d^3\vec{r}$ que l'on repère en coordonnées polaires (r, θ, ϕ). Montrer que l'angle solide sous lequel est vu la surface dS est $d\Omega = \cos\theta\, dS / r^2$. En déduire la probabilité qu'un photon situé dans le petit volume impacte la surface. Quelle est l'énergie reçue par la surface en provenance de ce petit volume (en fonction de e donné par l'équation (3)) ?
2. En intégrant sur la demi-sphère, retrouver la loi de Stefan-Boltzmann.

3 Loi de Wien

1. À partir de la question 1.9, donner l'équation permettant de trouver la longueur d'onde correspondant au maximum de densité d'énergie, et donc aussi au maximum d'emission par le corps noir.
2. Résoudre cette équation de manière approchée, en déduire la première loi de Wien :

$$\lambda_{\max} = \frac{\kappa}{T} \qquad \kappa = 2,9\ 10^6\ \mathrm{nm \cdot K} \tag{5}$$

   (La deuxième loi de Wien dit que le maximum d'intensité varie comme T^5.)
3. Application numérique pour la surface du Soleil ($T = 5000$ K) et le corps humain ($T = 310$ K).

Données

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}. \tag{6}$$

$$k_B = 1,38\,10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}} \qquad c = 3,00\,10^8\ \mathrm{m.s^{-1}} \tag{7}$$

$$h = 6,63\,10^{-34}\ \mathrm{J.s} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05\,10^{-34}\ \mathrm{J.s} \tag{8}$$