Physique statistique – TD 1
Combinatoire et lois de probabilité

CPES – L3

Répartition de particules en deux compartiments : loi binomiale

On considère un ensemble de N molécules de gaz dans un volume V. Étant donné un compartiment de volume $V_1 = \alpha V$, on s'intéresse à la loi du nombre de particules N_1 dans ce compartiment. On supposera que les molécules sont indépendantes et se répartissent uniformément dans le volume V.

1. Exprimer la probabilité $P(N_1 = n)$ d'avoir n particules dans le compartiment de volume V_1. (On pourra d'abord s'intéresser au cas $\alpha = 1/2$).
2. Pour se donner une idée de ce qui va suivre, on prend $N = 20$ et $\alpha = 1/2$.
   Comparer $P(N_1 = 0)$, $P(N_1 = 5)$ et $P(N_1 = 10)$. Commenter.
3. Montrer que pour N grand, on peut obtenir une loi continue pour $x = n/N$ et qu'elle s'écrit :
   $$\ln P(N_1 = xN) = NS(x) \qquad \text{ou} \qquad P(N_1 = xN) = Ae^{NS(x)}. \tag{1}$$
   Déterminer la fonction $S(x)$ en utilisant la formule de Stirling simplifiée :
   $\ln N! \underset{N\to\infty}{\sim} N(\ln N - 1)$. *[Optionnel]* On pourra si l'on veut déterminer le coefficient de normalisation A en utilisant la formule de Stirling complète : $N! \underset{N\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N}(N/e)^N$.
4. Pour quelle valeur de x, S est-elle maximale ?
5. Que vaut $P(N_1 = 0)$? Pour $\alpha = 1/2$, calculer $P(N_1 = N/2)/P(N_1 = N/4)$. On pourra tester $N = 100, 1000, \ldots$

Faibles variations par rapport à la moyenne : loi gaussienne

6. Développement S à l'ordre 2 autour de son maximum. En notant X la variable aléatoire prenant pour valeur x, et $\rho(x) = P(N_1 = xN)$ sa densité, montrer que l'on obtient
   $$\rho(x) = Ae^{-k(x-\mu)^2}. \tag{2}$$
   Que valent μ et k ?
   L'équation (2) correspond à la densité de probabilité d'une variable gaussienne.
7. On cherche à calculer la constante de normalisation A. Pour cela on considérera deux variables aléatoire indépendantes obéissant à la même loi gaussienne. La densité de la loi jointe s'écrit $\rho(x, y) = \rho(x)\rho(y)$. Trouver A en utilisant le fait que la loi jointe est normalisée. On fera un changement de variables vers les coordonnées polaires.
8. Calculer la moyenne et la variance de la loi gaussienne (2). À partir de maintenant on notera :
   $$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{3}$$

9. On définit la fonction génératrice $G(t)$ de la variable aléatoire X par :

$$G(t) = \langle e^{tX} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) e^{tx}. \tag{4}$$

   (a) Expliquer pourquoi $\langle X \rangle = G'(0)$, $\langle X^2 \rangle = G''(0)$, …, $\langle X^p \rangle = G^{(p)}(0)$. ($G^{(p)}$ est la p-ième dérivée de G).

   (b) Calculer $G(t)$ pour la variable gaussiennne (3).

10. On considère deux variables gaussiennes X et Y indépendantes de lois respectives ρ_X et ρ_Y.

$$\rho_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \qquad\qquad \rho_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} \tag{5}$$

La densité de probabilité de leur somme $Z = X + Y$ est donnée par la convolution des deux densités de probabilité :

$$\rho_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_X(x) \rho_Y(z-x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \rho_X(z-y) \rho_Y(y) \tag{6}$$

Déterminer la loi de Z. On utilisera *au choix* l'une des deux méthodes suivantes :

— Calcul direct de $\rho_Z(z)$.

— Montrer que la fonction génératrice de la somme est le produit des deux fonctions génératrices. Faire le calcul et conclure.

Fluctuations dans un volume fini : loi de Poisson

11. On reprend la loi de probabilité de la question 1 et on s'intéresse à la limite de grand volume total ($V \to \infty$) et grand nombre de particules ($N \to \infty$). Pour des raisons physiques cette limite est prise à densité $\rho = N/V$ constante. Le volume V_1 reste lui aussi fini, de sorte que $\alpha = V_1/V \to 0$. La variable pertinente n'est donc plus α, mais λ définie par :

$$\lambda = \alpha N = \rho V_1 \tag{7}$$

Montrer que le nombre de particules dans le volume V_1 obéit à une loi de Poisson :

$$P(N_1 = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}. \tag{8}$$

On admet que la moyenne de la loi de Poisson est λ, et que sa variance est aussi λ.
[Optionnel] Si vous avez le temps, vous pouvez montrer ce résultat en calculant la fonction génératrice $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{nt}$. De même que précédement $\langle N_1 \rangle = G'(0)$ et $\langle N_1^2 \rangle = G''(0)$.

12. On considère de l'air (assimilé à un gaz parfait) dans les conditions normales de température et de pression ($T = 0$ °C, $P = 1$ atm). Estimer les fluctuations typiques de densité (d'origine pûrement statistique) $\Delta\rho/\rho$ dans un volume $V_1 = 1$ mm^3.
En réalité, des phénomènes physiques (gradient de température, mouvements d'air, ondes sonores, etc.) induisent des perturbations beaucoup plus grandes que celà.

Nom	Domaine	Expression	Moyenne	Variance	$G(t) = \langle e^{tX} \rangle$	Remarques
Bernouilli	$\{0,1\}$	$P(1) = p, P(0) = 1-p$	p	$p(1-p)$	$pe^t + 1 - p$	Décrit un tirage à pile ou face avec une pièce biaisée (probabilités p et $1-p$).
Binomiale	$[[0,N]]$	$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$	Np	$Np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^N$	– On place N billes indépendemment dans deux urnes : probabilité p pour la première, $1-p$ pour la deuxième. Cette loi décrit le nombre de billes dans la première urne. – Il s'agit de la somme de N variables de Bernouilli indépendantes (comparer les expressions de la moyenne, variance et fonction génératrice).
Poisson	$\mathbb{N}^+$	$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$	– Limite de la loi binomiale quand $N \to \infty$ et $pN = \text{constante} = \lambda$. – Si le passage d'un bus est régi par une loi exponentielle de temps caractéristique $\alpha^{-1} = 10$ min, le nombre de bus qui passent pendant $T = 1$ h est décrit par une loi de Poisson avec $\lambda = T/\alpha^{-1} = 6$. – Si X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2, $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
Exponentielle	$\mathbb{R}^+$	$\rho(x) = \alpha e^{-\alpha x}$	α^{-1}	α^{-2}	$\frac{1}{1 - t/\alpha}$	– Durée de vie d'un phénomène sans mémoire. Exs : radioactivité, durée de vie d'un composant. – $\mathbb{P}(X > a + y \mid X > a) = \mathbb{P}(X > y)$ – Si X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois exponentielles de paramètres α_1 et α_2, $\min(X_1, X_2)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha_1 + \alpha_2$.
Gaussienne	$\mathbb{R}$	$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$	– Loi limite d'une somme de variables aléatoires indépendantes distribuées identiquement (théorème central limite). – Si X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois gaussiennes de paramètres (μ_1, σ_1^2) et (μ_2, σ_2^2), $X_1 + X_2$ suit une loi gaussienne de paramètres $(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.