— PROJET DE THÈSE —
ALGORITHMIQUE EFFICACE POUR LES DIAGONALES, APPLICATIONS EN COMBINATOIRE, PHYSIQUE ET THÉORIE DES NOMBRES

DOCTORANT : LOUIS DUMONT
DIRECTEURS : ALIN BOSTAN ET BRUNO SALVY

1. Contexte scientifique

1.1. **Calcul formel.** Le *calcul formel* est un domaine très dynamique depuis une cinquantaine d'années, qui se situe au carrefour des mathématiques et de l'informatique, et vise à rendre effectives et efficaces les parties « algébrisables » des mathématiques. Il peut ainsi être vu comme le frère cadet du calcul numérique ; son but est la manipulation des objets mathématiques de *façon exacte*, à la différence du *calcul approché*. Le grand atout du calcul formel est l'apport d'une description complète et exacte des objets calculés : il n'est pas confronté aux erreurs d'arrondis. En échange, le prix à payer est, d'une part, la contrainte de nature géométrique qu'est la taille intrinsèque des objets à calculer, d'autre part, un phénomène de croissance des données au cours des calculs. Ceci explique le lien étroit entre le calcul formel et la *théorie de la complexité algébrique* qui vise à donner des estimations les plus précises possible (bornes supérieures et inférieures) sur la taille des objets à calculer, ainsi que sur le temps nécessaire à l'exécution des algorithmes.

Au sein du calcul formel, l'une des spécificités de la recherche effectuée aux projets SpecFun (Inria Saclay) et AriC (Inria Grenoble), où cette thèse sera effectuée en co-direction, est le positionnement à l'interface entre l'algèbre et l'analyse, avec un point de vue fortement orienté vers la complexité. Les acteurs majeurs des études sont les *fonctions spéciales de la physique mathématique* et les *suites de nombres de la combinatoire*. Le sujet de thèse développé ici est à la confluence de trois grandes directions de recherche actuelles :

– considérer les équations différentielles et de récurrence comme des structures de données représentant des objets mathématiques infinis tels les fonctions et les suites (« D-finitude ») ;
– développer des algorithmes pour la sommation et l'intégration définies, et pour la preuve automatique d'identités (« création télescopique ») ;
– rechercher des algorithmes quasi-optimaux en utilisant l'analyse de complexité comme outil de conception algorithmique.

1.2. **D-finitude.** Historiquement, d'importants efforts de recherche en calcul formel ont été consacrés à donner des solutions *en forme close* de divers problèmes. Un exemple spectaculaire est le calcul de primitives. Les premiers travaux dans ce sens mimaient les méthodes de calcul à la main. Puis l'algorithme de Risch [68], fondé sur des théorèmes de structure en algèbre différentielle, a fourni une solution générale (un algorithme de décision) pour les fonctions élémentaires. Plus largement, de nombreux travaux, notamment ceux de Singer [70, 71], ont étendu la classe des équations différentielles que les logiciels de calcul formel permettent de résoudre explicitement en termes de fonctions dites *liouvilliennes*. Cependant, l'existence de telles solutions est l'exception plutôt que la règle, ce qui réduit l'application de ces algorithmes à des questions de décision, ou à l'initiation aux équations différentielles dans l'enseignement des mathématiques.

Ce projet de thèse s'inscrit dans un effort de développement d'une algorithmique *générale* et *efficace* sur les solutions d'équations différentielles linéaires (dites *différentiellement finies* ou *D-finies*), *représentées implicitement* par une équation différentielle et des conditions initiales. Une série est D-finie si et seulement si la suite de ses coefficients satisfait une relation de récurrence linéaire à coefficients polynomiaux (on dit de cette suite qu'elle est *P-récursive*) ; et là encore, cette récurrence est une structure de données adéquate pour manipuler la suite.

Les principales propriétés mathématiques des fonctions D-finies sont connues depuis le XIX$^{\text{e}}$ siècle. Leur développement moderne en combinatoire et en calcul formel est dû en grande partie à Stanley [72] puis Zeilberger [78], qui ont souligné leur intérêt comme classe de fonctions close par plusieurs opérations importantes et bénéficiant d'une algorithmique riche. L'étude systématique, du point de vue algorithmique, des fonctions D-finies et des suites P-récursives s'est poursuivie depuis. Sur le plan pratique, des logiciels comme le module Maple `gfun` [69] fournissent déjà un grand nombre d'opérations importantes sur cette structure de données.

1.3. **Intégration et sommation symboliques.** La notion de D-finitude admet des généralisations fructueuses à plusieurs variables [57], et à des systèmes mixtes mélangeant dérivées partielles, récurrences multiples, q-analogues... [38]. Les algorithmes associés permettent de manipuler des expressions complexes dans les systèmes de calcul formel, et notamment de prouver, voire de calculer, des identités entre sommes et intégrales de solutions de systèmes D-finis [38, 35], comme

$$\text{(E)}\qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}J_0(z)^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(z)^2 &= \frac{1}{2}, \\ \int_0^{+\infty} xJ_1(ax)I_1(ax)Y_0(x)K_0(x)\,dx &= -\frac{\ln(1-a^4)}{2\pi a^2}, \end{aligned}$$

(où les J_ν, I_ν, Y_ν et K_ν sont des fonctions de Bessel).

Le calcul de telles sommes et intégrales repose sur une sorte d'élimination non-commutative, dans certaines algèbres d'opérateurs (différentiels ou aux différences). L'une des techniques célèbres permettant de faire cela est la *création télescopique* introduite de manière ad-hoc par Zagier [75] en 1978 pour démontrer certaines identités utilisées par Apéry dans la preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$. La technique a été formalisée et rendue algorithmique à partir des années 1990, d'abord par Zeilberger dans une série d'articles traitant le cas de base (dit « hypergéométrique ») [78, 79, 28], puis dans un cadre bien plus général (dit « holonome ») par Chyzak dans sa thèse [34].

Dans la lignée ouverte par Zeilberger, les récents travaux de Chyzak, Salvy et Kauers [38, 37] ont montré la possibilité d'algorithmiser l'intégration et la sommation des fonctions spéciales définies par des systèmes d'équations différentielles, via des calculs de bases de Gröbner dans des anneaux non-commutatifs. Le sujet est cependant loin d'être clos car de nombreux problèmes d'efficacité, tant théoriques que pratiques, demeurent.

1.4. **Complexité.** La complexité des opérations sur les objets de base du calcul formel que sont les entiers, les séries formelles ou les matrices est étudiée depuis longtemps, comme en témoigne le volume 2 du livre de Knuth [54]. Ces questions ont connu un regain d'intérêt ces dernières années [45] grâce à l'arrivée de machines de bureau permettant d'attaquer des problèmes de grande taille. Il s'avère que pour ces tailles, d'une part, les analyses asymptotiques de complexité permettent des prédictions fiables sur les temps de calcul et, d'autre part, les algorithmes rapides à base de transformée de Fourier rapide (FFT) deviennent rentables en pratique.

Or, l'utilisation d'équations différentielles et de récurrences comme structures de données mène naturellement à la production d'équations de grande taille, et en particulier d'ordre élevé. C'est notamment le cas pour l'opération de création télescopique qui est au cœur du calcul d'identités comme (E) — en effet, l'élimination non-commutative sous-jacente subit des contraintes de dimension similaires à celles de l'élimination pour les systèmes polynomiaux. Par ailleurs, des problèmes de grande taille proviennent de questions de combinatoire ou de physique statistique. En effet, si un préjugé encore répandu postule que la nature serait régie par des équations différentielles d'ordre au plus 2 ou 3, et que donc il serait inutile de se préoccuper de la complexité asymptotique des calculs sur des équations d'ordre élevé, les applications traitées dans [20, 21, 10] prouvent tout le contraire.

Il faut donc revisiter une bonne partie des algorithmes du calcul formel et comprendre comment les faire bénéficier des opérations asymptotiquement rapides, le but étant de concevoir des algorithmes dont le coût soit aussi proche que possible de la taille des objets calculés. Au-delà des entiers et des séries, on voit ainsi apparaître maintenant de nouveaux algorithmes de complexité *quasi-optimale* (c'est-à-dire optimale à des facteurs logarithmiques près par rapport à la taille de l'entrée et de la sortie) pour une grande variété de problèmes. Dans le cadre de la D-finitude, des progrès ont été réalisés récemment (voir en particulier [50, 8, 14, 15, 51, 17, 6]), mais de nombreux problèmes sont encore en quête d'un algorithme quasi-optimal ; quelques-uns d'entre eux seront décrits ci-dessous et pourront faire l'objet de travaux durant la thèse.

Concernant la complexité de l'intégration et de la sommation symboliques, la « phase de faisabilité » (1990–2005) laisse maintenant la place à l'étape suivante, la « phase d'efficacité ». Peu de choses sont connues actuellement, et les quelques exceptions [74, 47, 46, 14, 11, 22, 12] ne couvrent que des cas particuliers. Le défi est de comprendre comment rendre les algorithmes de sommation et d'intégration plus performants, de façon à ce qu'ils puissent permettre de résoudre de « vrais » problèmes venus de la combinatoire et de la physique. Cela pose de nombreuses et de très belles questions de mathématiques, d'algorithmique, de complexité.

1.5. **Diagonales.** La notion mathématique centrale de cette thèse sera celle de *diagonale* : étant donnée une série formelle à plusieurs variables $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, sa *diagonale* est définie comme la série à une variable

$$\mathsf{Diag}(\varphi) = \sum_n c_{n,\ldots,n} x^n \in \mathbb{K}[[x]].$$

Les diagonales sont liées à des objets intéressants en combinatoire [73, 43], physique statistique [61, 49] et théorie des nombres [3, 42, 2]. En combinatoire l'importance de cette opération vient du fait que de nombreuses constructions sur les séries génératrices (produits d'Hadamard, termes constants ou parties positives de séries de Laurent, ...) se codent comme des diagonales [73]. En théorie des nombres, des diagonales surgissent dans des preuves d'irrationalité, comme celle d'Apéry pour l'irrationalité de $\zeta(3)$ [75, 30, 58]. En physique statistique, des questions liées à la susceptibilité magnétique du modèle d'Ising font également intervenir des diagonales [9].

Un résultat classique de Lipshitz [56] prédit que la diagonale d'une série D-finie φ est D-finie. En particulier, les coefficients de $\mathsf{Diag}(\varphi)$ obéissent à une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux. Une question naturelle est alors : comment obtenir algorithmiquement une équation différentielle satisfaite par $\mathsf{Diag}(\varphi)$? Le problème se reformule en termes de calcul d'une intégrale multiple à paramètres, il rentre donc naturellement dans l'orbite de l'intégration symbolique, et toutes les techniques algorithmiques d'intégration peuvent ainsi lui être appliquées. Cependant, une question de nature fondamentale se pose : est-il possible d'exploiter la structure particulière des diagonales afin d'accélérer l'intégration ?

2. Objectifs de la thèse

Le sujet de la thèse est

Algorithmique efficace pour les diagonales,
applications en combinatoire, physique et théorie des nombres.

Il s'agit de concevoir et valider des algorithmes efficaces et, si possible, quasi-optimaux pour les diagonales.

Pour focaliser le choix des problèmes à étudier, deux objectifs de long terme serviront de guide :
- automatiser de façon efficace le calcul d'équations différentielles ou algébriques satisfaites par les diagonales ;
- comprendre la complexité intrinsèque de ces calculs, et appliquer les algorithmes proposés à des questions venues de domaines voisins, comme la combinatoire, la physique théorique et la théorie des nombres.

La suite de ce document est organisée comme ceci : nous détaillerons d'abord dans §2.1 trois familles d'exemples qui serviront de base de test pour le développement d'outils théoriques et pratiques lors de cette recherche. Les sections ultérieures (§2.2–§2.13) présentent un zoom sur quelques questions précises qui pourront être abordées au cours de cette thèse.

2.1. Motivation.

2.1.1. *Marches dans le quart de plan.* Les marches dans le quart de plan sont des chemins dans $\mathbb{N}^2$ qui partent de l'origine, dont les pas obéissent à certaines restrictions, restent dans le quart de plan, et aboutissent à des coordonnées fixées à l'avance. L'objet d'étude est le nombre de telles marches en n pas, et la nature de la suite de ces nombres lorsque n varie, ou de sa série génératrice. Malgré son apparence innocente, cette question est hautement non triviale, et gravite dans une orbite bien plus ample. Sa résolution est d'actualité dans les communautés de combinatoire énumérative, de probabilités, et de physique statistique [25, 26, 27, 67, 49].

Le cas le plus simple est une marche avec des pas unitaires nord et est, et terminant sur la diagonale. Les nombres sont alors des simples binomiaux et leur série génératrice est algébrique. L'algébricité persiste pour de nombreuses variantes : chemins contraints à rester sous la diagonale, pour lesquels l'énumération est fournie par les nombres de Catalan ; chemins avec des pas est et nord de longueur arbitraire (*problème des tours sur un échiquier bi-dimensionnel*), l'énumération est alors reliée aux nombres de Delannoy [39] ; analogue tri-dimensionnel, pour lequel la série génératrice n'est plus algébrique, mais possède la forme « explicite » [18]

$$1 + 6 \int_0^t \frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/3 & 2/3 \\ & 2\end{matrix} \,\middle|\, \frac{27x(3x-2)}{(4x-1)^3}\right)}{(4x-1)(64x-1)}\, dx,$$

où la notation ${}_2F_1$ désigne la série hypergéométrique de Gauss. (L'existence de ce type de représentation est liée à des questions de nature arithmétique qui nécessitent par ailleurs une étude plus approfondie.) Pourtant, l'algébricité n'est pas toujours simple à établir : le cas de pas unitaires restreints à l'ensemble ouest, sud-ouest, est et nord-est avait été conjecturé non-algébrique (et même non D-fini) par le combinatoricien américain Ira Gessel il y a une vingtaine d'années, et ce n'est que récemment que cette conjecture a été invalidée [21]. Il n'existe pour l'instant aucune preuve du résultat le plus général sans l'aide de l'ordinateur, la taille du polynôme minimal est estimée à 30 giga-octets (plusieurs DVDs !). Il existe également des cas où la série génératrice n'est ni algébrique, ni même D-finie ; la classification de ces situations est actuellement en travaux [23].

Ce type de problèmes peut être abordé en utilisant une approche de type *mathématiques expérimentales* guidée par des algorithmes modernes du calcul formel. Un ensemble d'idées et de techniques mathématiques et algorithmiques permet ainsi la *découverte* et la *preuve* assistées par ordinateur des réponses aux problèmes détaillés ci-dessus. D'autres problèmes résistent encore : pour le *problème des tours sur un échiquier de dimension* $n \geqslant 5$, bien que la théorie garantisse la D-finitude de la série (cf. 1.5), l'état de l'art algorithmique actuel permet seulement de *conjecturer* une équation différentielle [53] ; la *preuve* automatique de sa correction reste hors de la portée des algorithmes existants.

2.1.2. *Intégrales liées au modèle d'Ising.* Pour approcher des questions liées à la susceptibilité magnétique du modèle d'Ising, une série de travaux (e.g. [80]) considère la famille d'intégrales

$$\varphi_n(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} F_n(w,t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \text{où} \quad F_n(w,t) = \frac{1}{1 - x(w,t)^{n-1}x(w, T_{n-1}(t))},$$

$T_k(t)$ est le polynôme de Tchebychev de 1ère espèce défini par $\cos(kt) = T_k(\cos t)$, et

$$x(w,t) = \frac{2w}{1 - 2wt + \sqrt{(1-2wt)^2 - 4w^2}}.$$

La question est de déterminer la position des singularités complexes de la fonction φ_n. Ces fonctions sont des diagonales de fractions rationnelles [9] et satisfont des équations différentielles linéaires dont l'ordre croît avec n. L'équation différentielle renseigne sur ces singularités. Là encore, les preuves sont disponibles pour les petites valeurs de n ; seule l'approche de type mathématiques expérimentales permet d'aller un peu au-delà et pose des questions algorithmiques qui rentrent naturellement dans le cadre de cette thèse.

2.1.3. *Diagonales en théorie des nombres.* La classe des diagonales apparait comme une famille distinguée de fonctions en arithmétique [30, 31, 32], notamment en lien avec la classe des G-fonctions [3, 42] et les travaux autour du résultat d'irrationalité d'Apéry [75, 58]. Par exemple, la série génératrice des nombres d'Apéry est une diagonale [4] :

$$\begin{aligned}\mathsf{Diag}\left(\frac{1}{1-y-z-y-xz-zw-xyw-xyzw}\right) &= 1 + 5t + 73t^2 + 1445t^3 + \cdots \\ &= \sum_{n\geqslant 0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 t^n.\end{aligned}$$

2.2. **Calcul d'une équation différentielle pour la diagonale.** L'un des premiers résultats sur les diagonales, dû à Pólya [66] et Furstenberg [44] est que la diagonale d'une fraction rationnelle à deux variables est une fonction algébrique. La preuve repose sur le théorème des résidus de Cauchy et est complètement effective. À partir de trois variables, ce résultat n'est plus valable : la diagonale d'une fonction rationnelle est en général transcendante. C'est déjà le cas pour l'une des plus simples fractions rationnelles à trois variables, $1/(1-x-y-z)$. Cependant, un résultat de Christol [31] affirme que la diagonale d'une fraction rationnelle à plusieurs variables est D-finie. La preuve sur deux arguments difficiles et non constructifs : la finitude d'un certain espace de cohomologie de de Rham, et la résolution de singularités. Lipshitz [57] a obtenu une généralisation du résultat de Christol : *la diagonale de toute fonction D-finie est D-finie*. Sa preuve est élémentaire et constructive, cependant elle ne fournit pas directement un algorithme efficace ; par exemple, pour déterminer une équation différentielle vérifiée par la diagonale de $1/(1-x-y-z)$, l'argument de Lipshitz ramène la question à de l'algèbre linéaire en taille avoisinant les 50 millions..., alors que la diagonale en question vérifie l'équation très simple $(27t^2-t)y''(t)+(54t-1)y'(t)+6y(t)=0$.

La situation est encore pire dans les exemples (mêmes les plus simples) issus des applications : dans l'exemple du *problème des tours sur un échiquier tri-dimensionnel* évoqué en §2.1.1, la taille du système linéaire avoisine le milliard [1]. Ce n'est donc pas l'algorithme implicite dans la preuve de Lipshitz qui permettra de calculer efficacement des équations différentielles vérifiées par une diagonale. Une alternative algorithmique plus raisonnable est fournie par l'algorithme de *création télescopique* de Chyzak [36]. Plaçons-nous dans le cas où la fonction $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ dont on prend la diagonale est une fraction rationnelle. Si F désigne la fraction rationnelle $F = \varphi(x_1, x_2/x_1, \ldots, x_n/x_{n-1})/(x_1\cdots x_{n-1})$, et si l'équation dite de *création télescopique*

$$P\left(x_n, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(F) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \qquad (\mathsf{T})$$

admet une solution $(P, g_1, \ldots, g_{n-1})$, où P est un opérateur différentiel linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}[x_n]$, et où $g_1,\ldots,g_{n-1}$ sont des fractions rationnelles dans $\mathbb{K}(x_1,\ldots,x_n)$, alors P annule $\mathsf{Diag}(\varphi)$.

Bien qu'il arrive à traiter le problème des tours en 3D, l'algorithme de *création télescopique* de Chyzak pour la résolution de (T) passe toutefois par le calcul prohibitif des certificats. Dans cet exemple, l'opérateur P est d'ordre 3, à coefficients de degré au plus 4, tandis que le degré total des certificats est de l'ordre de la trentaine. C'est cette obstruction qui empêche les implantations [2] de l'algorithme de traiter le même problème en dimension plus grande que 5.

Plusieurs autres algorithmes existent pour résoudre l'équation (T), mais aucun n'est à la fois satisfaisant en pratique et bien maîtrisé du point de vue de la complexité. Une faiblesse commune à la plupart des méthodes connues est qu'ils ne peuvent pas calculer l'opérateur P sans calculer le *certificat* $(g_1,\ldots,g_{n-1})$. Or, la taille de ce certificat est beaucoup plus importante que celle de l'opérateur P. À ce jour, l'algorithme de meilleure complexité théorique ($d^{O(n)}$, où d est le degré de φ) pour la résolution de (T) est celui du très récent article [22], qui parvient à éviter le calcul couteux des certificats ; malheureusement, dans son état actuel, cet algorithme a de sévères limitations en pratique justement lorsqu'il est appliqué au calcul de diagonales.

QUESTION. *Concevoir un algorithme efficace en théorie et en pratique pour calculer une équation différentielle satisfaite par la diagonale d'une fonction rationnelle.*

Une piste alternative est esquissée dans [12]. Cet algorithme permet de traiter la question des tours 3D, mais, à cause d'une limitation théorique sévère, il ne fonctionne pas sur l'exemple des tours 4D. Il serait intéressant d'étendre le champs d'application de l'algorithme de [12].

QUESTION. *Concevoir un algorithme de réduction pour calculer une équation différentielle satisfaite par la diagonale d'une fonction algébrique ou hyperexponentielle à plus de deux variables. Étudier sa complexité.*

2.3. **Calcul d'un ou plusieurs termes d'une diagonale.** Une équation différentielle pour $\mathsf{Diag}(\varphi)$ peut être utilisée pour calculer le développement en série à grande précision de $\mathsf{Diag}(\varphi)$. Encore faut-il disposer des conditions initiales, c'est-à-dire des premiers termes du développement.

1. L'article [18] propose une optimisation de l'argument de Lipshitz qui se ramène à de l'algèbre linéaire (sur une matrice polynomiale) en taille bien plus petite, mais toujours trop élevée (10 000 dans le cas des tours 3D !).

2. À ce jour, l'implantation la plus efficace de la création télescopique (en Mathematica) est due à Koutschan [55].

À l'inverse, une approche possible pour déterminer l'équation P vérifiée par $\mathsf{Diag}(\varphi)$, sans calculer les certificats $(g_1, \ldots, g_{n-1})$, passe par le développement en série de la diagonale et la reconstruction, par *approximation de Padé-Hermite différentielle*, d'une équation différentielle dont elle est solution. C'est cette heuristique qui a permis [53] de conjecturer une équation différentielle dans le cas du problème des tours en dimension jusqu'à $n = 12$ (!) [3] Pour que cette heuristique puisse être convertie en un algorithme général, il faudrait disposer de bornes fines *a priori* sur l'ordre de développement en série suffisant pour certifier la correction de l'équation reconstruite. Par ailleurs, pour que l'algorithme soit efficace, il est nécessaire de savoir calculer efficacement la diagonale d'une série à plusieurs variables. La méthode directe qui consiste à calculer $\mathsf{Diag}(\varphi) \bmod t^N$ en développant φ à précision N par rapport à toutes les variables est de très mauvaise complexité.

Plusieurs algorithmes plus efficaces existent déjà [59, 60], mais on est encore loin d'avoir compris leur complexité théorique et pratique. Quant à la certification de l'approximation, une première étude a été fructueuse dans le cas algébrique [16], et repose sur l'utilisation d'un résultant de polynômes bivariés. Il est envisageable d'étendre ce résultat en s'appuyant sur la notion de *résultant différentiel* [7].

Question. *Étudier la complexité du développement en série d'une diagonale. Donner des bornes garantissant la correction des approximants de Padé-Hermite.*

Une question liée concerne le calcul du N-ième terme d'une diagonale, sans passer par le calcul de tous les termes qui le précédent.

Question. *Étudier la complexité du calcul du N-ième terme d'une série diagonale.*

2.4. **Diagonales modulo p.** Un résultat étonnant, dû à Furstenberg [44] pour les fractions rationnelles, et à Deligne [40] pour les fonctions algébriques, est que, en caractéristique positive, la diagonale d'une fraction rationnelle ou d'une fonction algébrique est encore une fonction algébrique. Par exemple, la diagonale de $1/(1 - y - z - xy - xz)$ vaut la fonction transcendante ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2 & 1/2 \\ & 1\end{matrix} \middle| \, 16t\right)$, alors que pour tout nombre premier p, sa réduite modulo p égale la racine $(p-1)$-ième d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{F}_p(t)$ [9].

Une version quantitative du résultat de Furstenberg-Deligne a été obtenue tout récemment [1]. Du point de vue du calcul, nombre de questions algorithmiques restent en suspens, tant concernant la détermination d'une équation, différentielle ou algébrique, que le calcul du N-ième ou des N premiers termes d'une diagonale modulo p.

Question. *Donner un algorithme efficace pour calculer des équations, différentielle et algébrique, satisfaites par une diagonale en caractéristique p. Étudier la complexité du calcul du N-ième ou des N premiers termes d'une série diagonale en caractéristique p.*

Des arguments faisant le lien avec le monde des suites p-automatiques [13] suggèrent que, contrairement au cas général, la complexité du calcul du N-ième terme modulo p est seulement logarithmique en N. Cette excellente complexité vis-à-vis de N est atteinte après un précalcul qui ne dépend pas de N, mais dont le coût est au moins linéaire en p. La pertinence de cette approche reste à confirmer.

2.5. **Reconstruction efficace d'équations algébriques et différentielles.** Étant données s séries formelles $f_1, \ldots, f_s$ dans $\mathbb{K}[[x]]$, et s entiers naturels $d_1, \ldots, d_s$, le problème d'*approximation de Padé-Hermite* est celui du calcul d'un s-uplet non nul $(g_1, \ldots, g_s)$ de polynômes dans $\mathbb{K}[x]$, tels que $\deg(g_i) < d_i$ et que la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^s g_i f_i$ soit nulle à précision $n = \sum_{i=1}^s d_i$. L'algorithme de type *diviser-pour-régner* de Beckermann-Labahn [5] calcule un tel approximant en complexité $\tilde{O}(s^\omega n)$, où ω est l'exposant de l'algèbre linéaire. Cette complexité a été récemment abaissée à $\tilde{O}(s^{\omega-1} n)$ dans [19], grâce à l'artillerie des *matrices structurées*. Lorsque les séries f_i sont *génériques*, l'entrée de ces algorithmes est de taille $O(sn)$, et la complexité de [19] est proche de cette taille. Cependant, plusieurs questions naturelles restent ouvertes dans des cas *non génériques*. Par exemple, la reconstruction d'équations algébriques ou différentielles vérifiées par une série donnée f se code en un problème d'*approximation de Padé-Hermite structuré*, en prenant $f_i = f^{i-1}$ ou $f_i = f^{(i-1)}$. L'entrée et la sortie sont dans ces deux cas de taille comparable $O(n)$, et les algorithmes généraux [5, 19] n'arrivent à exploiter que partiellement la structure spéciale du problème.

3. Cette dimension est complètement inaccessible aux algorithmes existants pour la création télescopique.

Question. *Est-il possible de calculer des approximants de Padé-Hermite algébriques ou différentiels en complexité $\tilde{O}(sn)$, ou même moindre ?*

2.6. **Taille des équations, équations non minimales, singularités apparentes.** Comme les équations différentielles sont souvent elles-mêmes résultats d'un calcul, il est parfois possible d'améliorer l'efficacité des algorithmes ultérieurs en revisitant les algorithmes en amont. Ceux-ci ont souvent été conçus pour produire les opérateurs d'ordre minimal, ce qui n'est pas nécessairement le bon critère à optimiser pour faciliter la suite des calculs. En particulier, les opérateurs d'ordre minimal sont souvent encombrés de *singularités apparentes*, qui augmentent considérablement le degré de leurs coefficients [52]. Dans le cas particulier des diagonales de fractions rationnelles à deux variables, il est apparu récemment des gains d'ordre de grandeur en s'affranchissant de la minimalité [16, 11]. Le même phénomène se produit dans un contexte légèrement plus général, pour les diagonales de fonctions hyperexponentielles à deux variables [29]. Il a été également observé [21] que l'approximation de Padé-Hermite différentielle peut elle-aussi bénéficier du calcul d'équations non minimales : l'opérateur d'ordre minimal nécessite souvent un nombre trop important de termes de la série solution, et cela empêche, ou ralentit, la reconstruction.

Question. *Comment effectuer le calcul d'une équation différentielle vérifiée par une diagonale, en minimisant non pas l'ordre mais la taille totale de la sortie ?*

2.7. **L'algèbre des diagonales.** Il est classique [32] que l'ensemble des diagonales des fractions rationnelles est une algèbre qui est stable par plusieurs opérations, comme la dérivation, le produit de Hadamard et de Hurwitz, les opérateurs de section, et le changement de variable algébrique. Une question naturelle est d'effectuer ces opérations de clôture de façon algorithmique en bonne complexité, tant aux niveau des fonctions elles-mêmes, qu'au niveau des opérateurs différentiels les annulant.

2.8. **Complexité des opérations de base sur les opérateurs différentiels.** Les opérateurs différentiels linéaires en la dérivation $\frac{\partial}{\partial x}$ et à coefficients dans $\mathbb{K}(x)$ forment un anneau non-commutatif. La mise en évidence d'un cadre commun pour les opérateurs linéaires et les polynômes remonte à Ore [62]. En particulier, Ore a explicité un algorithme d'Euclide étendu permettant de calculer le pgcd et le ppcm d'opérateurs linéaires, mais cette algorithme est réputé inefficace. Dans le cadre commutatif univarié, la complexité de ces calculs se réduit classiquement à celle du produit de polynômes, elle-même essentiellement optimale via la transformée de Fourier rapide. Par comparaison, le produit d'opérateurs différentiels n'est connu que depuis peu [50, 15, 6] comme étant équivalent au produit de matrices. En ce qui concerne les autres opérations de base sur les opérateurs différentiels, le calcul du pgcd a été abordé par Grigoriev dans les années 1990 [48] et un progrès tout récent concernant le ppcm a été obtenu dans [17].

Question. *Étant donnés s opérateurs dans $\mathbb{K}[x]\langle\frac{\partial}{\partial x}\rangle$ d'ordres $r_1, \ldots, r_s$, et coefficients de degrés bornés par $d_1, \ldots, d_s$, quelle est la complexité des calculs de leur résultant, produit tensoriel, symétrique et extérieur, exprimée en termes des paramètres d_i et r_i ?*

Un travail en cours de van der Hoeven [51] suggère que la complexité de toutes ces opérations pourrait se ramener à celle du produit, comme dans le cas commutatif. Cependant, l'analyse fine des tailles et des complexités exprimées en termes des paramètres de l'entrée reste à faire.

2.9. **Équations différentielles en caractéristique positive.** Si p est un nombre premier, la p-courbure d'un opérateur différentiel linéaire est un objet de nature arithmétique qui permet de comprendre l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire modulo p [77, Chap. 13]. Il mesure à quel point l'équation est loin de satisfaire au théorème de Cauchy sur l'existence, en un point ordinaire, d'une base de solutions séries. Du point de vue algorithmique, la p-courbure est un outil dont l'importance a été mise en évidence pour la première fois par van der Put [76] pour la factorisation des opérateurs différentiels, et plus récemment dans [20, 21] comme outil de filtre arithmétique, permettant de trier parmi les équations différentielles produites par approximations de Padé-Hermite différentielle, ou encore de tester l'existence d'une base de solutions algébriques.

Une première étude de complexité a été effectuée dans [24]. Cet article propose un algorithme de complexité sous-quadratique en p pour son calcul, et un algorithme de complexité quasi-linéaire pour décider sa nullité. Les questions suivantes sont donc naturelles.

Question. *Peut-on calculer la p-courbure en complexité quasi-linéaire en p ? Peut-on décider si elle est nulle, ou nilpotente, en complexité sous-linéaire en p ?*

2.10. **Asymptotique du N-ième terme d'une diagonale.** Bien des fois dans des applications combinatoires ou physiques, la valeur exacte du N-ième terme d'une diagonale n'est pas requise, mais seulement son comportement asymptotique. Dans une série d'articles [63, 64, 65], Pemantle et Wilson ont proposé une méthode pour déterminer l'asymptotique des suites à plusieurs indices ; leur approche couvre en particulier le cas des diagonales. Cela étant dit, peu est connu concernant la complexité de cette approche. Une question naturelle est donc de savoir si elle est intrinsèquement plus efficace que celle consistant à calculer une équation différentielle pour la diagonale, pour ensuite appliquer des méthodes classiques de type Birkhoff-Trjitzinsky [43]. Une comparaison d'efficacité pourra se faire également avec la méthode heuristique utilisée par exemple dans [20, 53], reposant sur le calcul de termes éloignés de la série diagonale, suivi d'une extrapolation numérique du comportement asymptotique.

2.11. **Écrire une fonction donnée comme une diagonale.** Une question intéressante dans certaines applications en théorie des nombres est de savoir décider si une série donnée peut s'écrire comme diagonale, et le cas échéant de déterminer une telle écriture. Bien que quelques heuristiques existent [9], il n'y a pas encore de méthode algorithmique générale, et par exemple la question est ouverte pour la simple fonction hypergéométrique ${}_3F_2\left(\begin{matrix}1/9 & 4/9 & 5/9\\ & 1/3 & 1\end{matrix}\,\middle|\, t\right)$ [33]. Connaître la réponse à cette question permettrait de mieux comprendre la structure arithmétique de la classe des diagonales, et sa plausible égalité avec les séries D-finies à coefficients (presque) entiers.

2.12. **Denef-Lipshitz effectif.** Un résultat classique sur les diagonales [41] affirme que toute diagonale de fonction algébrique à n variables est une diagonale de fraction rationnelle à $2n$ variables. Cependant, la preuve de ce résultat bien qu'entièrement constructive, ne fournit pas d'algorithme efficace à la clé. Une question naturelle est de chercher une voie algorithmique permettant d'effectuer cette l'écriture en bonne complexité.

2.13. **Implémentation.** La conception d'implémentations efficaces des algorithmes étudiés dans un système de calcul formel constitue un autre aspect important de ce sujet. Le but est de développer une boite à outils prête à l'emploi de l'utilisateur combinatoricien, physicien ou théoricien des nombres, permettant d'effectuer les calculs sur les diagonales expliqués dans les paragraphes précédents.

Il faudra s'efforcer de ne pas garder le code écrit à l'état de prototype, mais au contraire de le rendre accessible aux applications et comme sous-routines pour des développements ultérieurs. Nous envisageons que le développement logiciel suivra le modèle du logiciel libre, ce qui devrait lui apporter visibilité et pérennité.

Références

[1] Adamczewski (B.) and Bell (J.). – Diagonalization and rationalization of algebraic Laurent series. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 2013. – 49 pages. To appear. Preliminary version at http://arxiv.org/abs/1205.4090.

[2] Allouche (J.-P.) and Shallit (J.). – *Automatic sequences.* – Cambridge University Press, Cambridge, 2003, xvi+571p. Theory, applications, generalizations.

[3] André (Y.). – *G-functions and geometry.* – Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989, *Aspects of Mathematics, E13*, xii+229p.

[4] Apéry (R.). – Sur certaines séries entières arithmétiques. In *Study group on ultrametric analysis, 9th year : 1981/82, No. 1*, pp. Exp. No. 16, 2. – Inst. Henri Poincaré, Paris, 1983.

[5] Beckermann (B.) and Labahn (G.). – A uniform approach for the fast computation of matrix-type Padé approximants. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 15, n° 3, 1994, pp. 804–823.

[6] Benoit (A.), Bostan (A.), and van der Hoeven (J.). – Quasi-optimal multiplication of linear differential operators. In *Proc. FOCS '12*. pp. 524–530. – IEEE, New Brunswick, October 2012.

[7] Berkovich (L. M.) and Tsirulik (V. G.). – Differential resultants and some of their applications. *Differential Equations*, vol. 22, n° 5, 1986, pp. 530–536.

[8] Bostan (A.). – *Algorithmique efficace pour des opérations de base en Calcul formel.* – PhD thesis, École polytechnique, 2003. 246 pages.

[9] Bostan (A.), Boukraa (S.), Christol (G.), Hassani (S.), and Maillard (J.-M.). – Ising n-fold integrals as diagonals of rational functions and integrality of series expansions. *J. Phys. A*, vol. 46, n° 18, 2013, p. 185202.

[10] Bostan (A.), Boukraa (S.), Hassani (S.), Maillard (J.-M.), Weil (J.-A.), and Zenine (N.). – Globally nilpotent differential operators and the square Ising model. *J. Phys. A : Math. Theor.*, vol. 42, n° 12, 2009, p. 50pp.

[11] Bostan (A.), Chen (S.), Chyzak (F.), and Li (Z.). – Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions. In *Proceedings of ISSAC'10*. pp. 203–210. – ACM, New York, 2010.

[12] Bostan (A.), Chen (S.), Chyzak (F.), Li (Z.), and Xin (G.). – Hermite reduction and creative telescoping for hyperexponential functions. In *Proceedings of ISSAC'13*. – 2013. To appear.

[13] Bostan (A.), Christol (G.), and Dumas (Ph.). – Fast computation of algebraic series modulo p. In preparation.

[14] Bostan (A.), Chyzak (F.), Cluzeau (T.), and Salvy (B.). – Low complexity algorithms for linear recurrences. In *Proceedings of ISSAC'06*. pp. 31–38. – ACM Press, New York, 2006.

[15] Bostan (A.), Chyzak (F.), and Le Roux (N.). – Products of ordinary differential operators by evaluation and interpolation. In *Proceedings of ISSAC'08*, pp. 23–30. – ACM, New York, 2008.

[16] Bostan (A.), Chyzak (F.), Lecerf (G.), Salvy (B.), and Schost (É.). – Differential equations for algebraic functions. In *Proceedings of ISSAC'07*. pp. 25–32. – ACM Press, 2007.

[17] Bostan (A.), Chyzak (F.), Li (Z.), and Salvy (B.). – Fast computation of common left multiples of linear ordinary differential operators. In *Proceedings of ISSAC'12*, pp. 99–106. – 2012.

[18] Bostan (A.), Chyzak (F.), van Hoeij (M.), and Pech (L.). – Explicit formula for the generating series of diagonal 3D rook paths. *Sém. Lothar. Combin.*, vol. 66, 2011/12, pp. Art. B66a, 27.

[19] Bostan (A.), Jeannerod (C.-P.), and Schost (É.). – Solving structured linear systems with large displacement rank. *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 407, n° 1-3, 2008, pp. 155–181.

[20] Bostan (A.) and Kauers (M.). – Automatic classification of restricted lattice walks. In *DMTCS Proceedings of the 21st International Conference FPSAC'09, Hagenberg, Austria*, pp. 203–217. – 2009.

[21] Bostan (A.) and Kauers (M.). – The complete generating function for Gessel walks is algebraic. *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 138, n° 9, 2010, pp. 3063–3078. – With an Appendix by M. van Hoeij.

[22] Bostan (A.), Lairez (P.), and Salvy (B.). – Creative telescoping for rational functions using the Griffiths-Dwork method. In *Proceedings of ISSAC'13*. – 2013. To appear.

[23] Bostan (A.), Raschel (K.), and Salvy (B.). – *Non-D-finite excursions in the quarter plane*. – Technical Report n° 1205.3300, arXiv, 2012.

[24] Bostan (A.) and Schost (É.). – Fast algorithms for differential equations in positive characteristic. In *Proceedings of ISSAC'09*. pp. 47–54. – ACM, New York, 2009.

[25] Bousquet-Mélou (M.). – Counting walks in the quarter plane. In *Mathematics and computer science, II (Versailles, 2002)*, pp. 49–67. – Birkhäuser, Basel, 2002.

[26] Bousquet-Mélou (M.). – Walks in the quarter plane : Kreweras' algebraic model. *The Annals of Applied Probability*, vol. 15, n° 2, 2005, pp. 1451–1491.

[27] Bousquet-Mélou (M.) and Mishna (M.). – Walks with small steps in the quarter plane. In *Algorithmic Probability and Combinatorics*, pp. 1–40. – Amer. Math. Soc, 2010.

[28] Cartier (P.). – Démonstration "automatique" d'identités et fonctions hypergéométriques (d'après D. Zeilberger). *Astérisque*, n° 206, 1992, pp. Exp. No. 746, 3, 41–91. – Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92.

[29] Chen (S.) and Kauers (M.). – Trading order for degree in creative telescoping. *J. Symbolic Comput.*, vol. 47, n° 8, 2012, pp. 968–995.

[30] Christol (G.). – Diagonales de fractions rationnelles et équations différentielles. In *Study group on ultrametric analysis, 10th year : 1982/83, No. 2, Exp. No. 18*, pp. 1–10. – Inst. Henri Poincaré, Paris, 1984.

[31] Christol (G.). – Diagonales de fractions rationnelles et équations de Picard-Fuchs. In *Study group on ultrametric analysis, 12th year, 1984/85, No. 1, Exp. No. 13*, pp. 1–12. – Secrétariat Math., Paris, 1985.

[32] Christol (G.). – Diagonales de fractions rationnelles. In *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87*, pp. 65–90. – Birkhäuser Boston, 1988.

[33] Christol (G.). – Globally bounded solutions of differential equations. In *Analytic number theory (Tokyo, 1988)*, pp. 45–64. – Springer, Berlin, 1990.

[34] Chyzak (F.). – *Fonctions holonomes en calcul formel*. – PhD thesis, École polytechnique, 1998. 227 pages.

[35] Chyzak (F.). – Gröbner bases, symbolic summation and symbolic integration. In *Gröbner Bases and Applications*, pp. 32–60. – Cambridge Univ. Press, 1998. Proceedings of the Conference *33 Years of Gröbner Bases*.

[36] Chyzak (F.). – An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions. *Discrete Mathematics*, vol. 217, n° 1-3, 2000, pp. 115–134.

[37] Chyzak (F.), Kauers (M.), and Salvy (B.). – A non-holonomic systems approach to special function identities. In *Proceedings of ISSAC'09*, pp. 111–118. – 2009.

[38] Chyzak (F.) and Salvy (B.). – Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate holonomic identities. *Journal of Symbolic Computation*, vol. 26, n° 2, August 1998, pp. 187–227.

[39] Coker (C.). – Enumerating a class of lattice paths. *Discrete Math.*, vol. 271, n° 1-3, 2003, pp. 13–28.

[40] Deligne (P.). – Intégration sur un cycle évanescent. *Invent. Math.*, vol. 76, n° 1, 1984, pp. 129–143.

[41] Denef (J.) and Lipshitz (L.). – Algebraic power series and diagonals. *J. Number Theory*, vol. 26, n° 1, 1987, pp. 46–67.

[42] Dwork (B.), Gerotto (G.), and Sullivan (F. J.). – *An introduction to G-functions.* – Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994, *Annals of Mathematics Studies*, vol. 133, xxii+323p.

[43] Flajolet (P.) and Sedgewick (R.). – *Analytic combinatorics.* – Cambridge University Press, Cambridge, 2009, xiv+810p.

[44] Furstenberg (H.). – Algebraic functions over finite fields. *J. Algebra*, vol. 7, 1967, pp. 271–277.

[45] von zur Gathen (J.) and Gerhard (J.). – *Modern Computer Algebra.* – Cambridge University Press, Cambridge, 2003, second edition, xiv+785p.

[46] Gerhard (J.). – *Modular Algorithms in Symbolic Summation and Symbolic Integration.* – Springer Verlag, 2004, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3218.

[47] Gerhard (J.), Giesbrecht (M.), Storjohann (A.), and Zima (E. V.). – Shiftless decomposition and polynomial-time rational summation. In *Proceedings of ISSAC'03.* pp. 119–126 (electronic). – ACM, New York, 2003.

[48] Grigor′ev (D. Yu.). – Complexity of factoring and calculating the GCD of linear ordinary differential operators. *J. Symbolic Comput.*, vol. 10, n° 1, 1990, pp. 7–37.

[49] Guttmann (A. J.) (editor). – *Polygons, Polyominoes and Polycubes.* – Springer, 2009, *Lecture Notes in Physics*, vol. 775.

[50] van der Hoeven (J.). – FFT-like multiplication of linear differential operators. *J. Symbolic Comput.*, vol. 33, n° 1, 2002, pp. 123–127.

[51] van der Hoeven (J.). – *On the complexity of skew arithmetic.* – Technical report, HAL, 2011. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00557750/fr/.

[52] Jaroschek (M.), Kauers (M.), Chen (K.), and Singer (M. F.). – Desingularization explains order-degree curves for Ore operators. In *Proceedings of ISSAC'13.* – 2013. To appear.

[53] Kauers (M.) and Zeilberger (D.). – The computational challenge of enumerating high-dimensional rook walks. *Adv. in Appl. Math.*, vol. 47, n° 4, 2011, pp. 813–819.

[54] Knuth (D. E.). – *The art of computer programming. Vol. 2 : Seminumerical algorithms.* – Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont, 1969, xi+624p.

[55] Koutschan (C.). – A fast approach to creative telescoping. *Math. Comput. Sci.*, vol. 4, n° 2-3, 2010, pp. 259–266.

[56] Lipshitz (L.). – The diagonal of a D-finite power series is D-finite. *J. Algebra*, vol. 113, n° 2, 1988, pp. 373–378.

[57] Lipshitz (L.). – D-finite power series. *J. Algebra*, vol. 122, n° 2, 1989, pp. 353–373.

[58] Lipshitz (L.) and van der Poorten (A. J.). – Rational functions, diagonals, automata and arithmetic. In *Number theory (Banff, AB, 1988)*, pp. 339–358. – de Gruyter, Berlin, 1990.

[59] Massazza (P.) and Radicioni (R.). – On computing the coefficients of rational formal series. In *Proceedings of the 16th International Conference FPSAC'04, Vancouver, Canada*, pp. 211–226. – 2004.

[60] Massazza (P.) and Radicioni (R.). – On computing the coefficients of bivariate holonomic formal series. *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 346, n° 2-3, 2005, pp. 418–438.

[61] McCoy (B. M.) and Wu (T. T.). – *The Two-Dimensional Ising Model.* – Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1973, vol. 146, xvi+418p.

[62] Ore (O.). – Theory of non-commutative polynomials. *Ann. of Math. (2)*, vol. 34, n° 3, 1933, pp. 480–508.

[63] Pemantle (R.) and Wilson (M. C.). – Asymptotics of multivariate sequences. I. Smooth points of the singular variety. *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 97, n° 1, 2002, pp. 129–161.

[64] Pemantle (R.) and Wilson (M. C.). – Asymptotics of multivariate sequences. II. Multiple points of the singular variety. *Combin. Probab. Comput.*, vol. 13, n° 4-5, 2004, pp. 735–761.

[65] Pemantle (R.) and Wilson (M. C.). – Twenty combinatorial examples of asymptotics derived from multivariate generating functions. *SIAM Rev.*, vol. 50, n° 2, 2008, pp. 199–272.

[66] Pólya (G.). – Sur les séries entières, dont la somme est une fonction algébrique. *Enseignement Math.*, vol. 22, 1921/1922, pp. 38–47.

[67] Raschel (K.). – *Chemins confinés dans un quadrant.* – PhD thesis, Université Paris VI, 2010. 200 pages.

[68] Risch (R. H.). – The solution of the problem of integration in finite terms. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 76, 1970, pp. 605–608.

[69] Salvy (B.) and Zimmermann (P.). – Gfun : a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 20, n° 2, 1994, pp. 163–177.

[70] Singer (M. F.). – Liouvillian solutions of nth order homogeneous linear differential equations. *Amer. J. Math.*, vol. 103, n° 4, 1981, pp. 661–682.

[71] Singer (M. F.). – Liouvillian solutions of linear differential equations with Liouvillian coefficients. *J. Symbolic Comput.*, vol. 11, n° 3, 1991, pp. 251–273.

[72] Stanley (R. P.). – Differentiably finite power series. *European J. Combin.*, vol. 1, n° 2, 1980, pp. 175–188.

[73] Stanley (R. P.). – *Enumerative combinatorics. Vol. 2.* – Cambridge Univ. Press, 1999, vol. 62, xii+581p.

[74] Takayama (N.). – An algorithm for finding recurrence relations of binomial sums and its complexity. *J. Symbolic Comput.*, vol. 20, n° 5-6, 1995, pp. 637–651. – Symbolic computation in combinatorics Δ_1 (Ithaca, NY, 1993).

[75] van der Poorten (A.). – A proof that Euler missed...Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. *Math. Intelligencer*, vol. 1, n° 4, 1978/79, pp. 195–203. – An informal report.

[76] van der Put (M.). – Reduction modulo p of differential equations. *Indag. Math. (N.S.)*, vol. 7, n° 3, 1996, pp. 367–387.

[77] van der Put (M.) and Singer (M. F.). – *Galois theory of linear differential equations.* – Springer-Verlag, Berlin, 2003, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 328, xviii+438p.

[78] Zeilberger (D.). – A holonomic systems approach to special functions identities. *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 32, n° 3, 1990, pp. 321–368.

[79] Zeilberger (D.). – The method of creative telescoping. *J. Symbolic Comput.*, vol. 11, n° 3, 1991, pp. 195–204.

[80] Zenine (N.), Boukraa (S.), Hassani (S.), and Maillard (J.-M.). – Square lattice Ising model susceptibility : series expansion method and differential equation for $\chi^{(3)}$. *J. Phys. A*, vol. 38, n° 9, 2005, pp. 1875–1899.