

Annick LESNE

Méthodes de Renormalisation

Phénomènes Critiques, Chaos, Structures Fractales

Éditions Eyrolles
1995

ISBN : 2-212-05830-6

Conçues il y a une trentaine d'années dans le cadre de l'électrodynamique quantique, les méthodes de renormalisation sont devenues progressivement un outil d'analyse incontournable dans les domaines les plus variés de la physique et des mathématiques appliquées :

- transitions de phase et phénomènes critiques,
- systèmes dynamiques et chaos,
- turbulence développée,
- structures fractales et systèmes complexes,
- percolation,
- physique des polymères,
- diffusion dans des milieux désordonnés,
- théorie de la mesure et processus stochastiques.

En dégagant les idées directrices communes à ces différentes variantes des techniques de renormalisation – notions d'*invariance d'échelle* et d'*universalité* – cet ouvrage a pour ambition de donner quelques clés pour une compréhension plus unifiée de la physique actuelle.

Construit à partir d'un texte principal accessible, complété par des appendices plus spécialisés, il s'adresse aussi bien à l'étudiant en fin d'études, abordant la recherche qu'au chercheur curieux d'une ouverture sur des sujets nouveaux ou désireux d'avoir une vue d'ensemble sur les phénomènes physiques auxquels s'appliquent la renormalisation.

Table des matières

Préface de Pierre Collet	v
Table des matières	vi
Avant-propos	xi

Chapitre 1 – Principes et cadre physique

1.1 - Introduction	
1.2 - Phénomènes critiques	
1.2.1 <i>La transition liquide-gaz critique d'un corps pur</i>	3
1.2.2 <i>Autres exemples de phénomènes critiques</i>	8
1.2.3 <i>Damiers et ballons : deux classes de phénomènes physiques</i>	10
1.2.4 <i>Universalité des propriétés critiques</i>	12
1.3 - Terminologie	
1.3.1 <i>Systèmes, règles de structure et généricité</i>	14
1.3.2 <i>Echelles caractéristiques</i>	15
1.3.3 <i>Limite thermodynamique et régime asymptotique</i>	18
1.3.4 <i>Lois d'échelle et exposants</i>	19
1.3.5 <i>Paramètre de contrôle</i>	20
1.3.6 <i>Remarque sur le terme de « renormalisation »</i>	22
1.4 - Méthodes de renormalisation	
1.4.1 <i>Pourquoi ?</i>	23
1.4.2 <i>Comment ?</i>	25
1.4.3 <i>Quand ?</i>	27
1.4.4 <i>Classes d'universalité</i>	28
1.4.5 <i>Bref historique</i>	29

Chapitre 2 – Etude comparée de deux exemples typiques

2.1 - Le modèle d'Ising unidimensionnel	
2.1.1 <i>Le modèle et son intérêt</i>	32
2.1.2 <i>Analyse par renormalisation</i>	35
2.1.3 <i>Résultats et prolongements</i>	38
2.2 - Le scénario du doublage de période	
2.2.1 <i>Systèmes dynamiques discrets</i>	41
2.2.2 <i>La bifurcation fourche</i>	43
2.2.3 <i>Le scénario du doublage de période</i>	45
2.2.4 <i>Analyse par renormalisation</i>	49
2.3 - Tableau comparatif	

Chapitre 3 – Aspects mathématiques

3.1 - Opérateurs de renormalisation	
3.1.1 <i>Objectifs et démarches typiques</i>	56
3.1.2 <i>Transfert de limites</i>	61
3.1.3 <i>Points fixes et variétés critiques</i>	61
3.1.4 <i>Renormalisation d'une famille paramétrée</i>	65
3.2 - Etude mathématique des systèmes critiques	
3.2.1 <i>Approche probabiliste d'un phénomène critique</i>	69
3.2.2 <i>Fluctuations et corrélations</i>	74
3.2.3 <i>Théories de champ moyen et loi des grands nombres</i>	78
3.2.4 <i>Phénomènes critiques et lois d'échelle en taille finie</i>	82
3.3 - Méthodes numériques	
3.3.1 <i>Simulation des phénomènes critiques</i>	84
3.3.2 <i>Conditions aux limites périodiques et renormalisation</i>	85
3.3.3 <i>Résolution numérique des équations de renormalisation</i>	86
3.3.4 <i>Renormalisation et méthode de Monte-Carlo</i>	87
3.4 - Groupes de renormalisation	
3.4.1 <i>Loi de groupe, groupes de Lie et générateurs infinitésimaux</i>	92
3.4.2 <i>Groupes de transformations et symétries associées</i>	96
3.4.3 <i>Représentations et groupes de symétrie</i>	98

Chapitre 4 – Mécanique statistique

4.1 - L'exemple du ferromagnétisme	
4.1.1 <i>Milieux magnétiques et transition ferromagnétique</i>	103
4.1.2 <i>Théorie de Langevin et loi de Curie</i>	107
4.1.3 <i>Théorie de champ moyen et loi de Curie-Weiss</i>	108
4.2 - Points critiques	
4.2.1 <i>Objectifs d'une théorie des phénomènes critiques</i>	111
4.2.2 <i>Transitions ferromagnétique et liquide-gaz</i>	114
4.2.3 <i>Limites des méthodes antérieures à la renormalisation</i>	115
4.3 - Techniques de renormalisation	
4.3.1 <i>Méthode dans l'espace réel</i>	116
4.3.2 <i>Champs et intégrales fonctionnelles</i>	120
4.3.3 <i>Renormalisation dans l'espace conjugué</i>	122
4.3.4 <i>Les principales classes d'universalité</i>	124
4.4 - Phénomènes critiques dynamiques	
4.4.1 <i>Aspects qualitatifs</i>	127
4.4.2 <i>Méthodes de renormalisation</i>	130

Appendice 4A – Analyse diagrammatique

4A.1 <i>Modèle gaussien et développements perturbatifs</i>	136
4A.2 <i>Expression analytique des diagrammes</i>	138
4A.3 <i>Approximations et résultats</i>	140

Appendice 4B – Verres de spins

4B.1 <i>Paramagnétisme, ferromagnétisme et verres de spins</i>	143
4B.2 <i>Systèmes frustrés</i>	145

4B.3	<i>Transition vers la phase verre de spins</i>	147
4B.4	<i>Méthodes de renormalisation</i>	148

Chapitre 5 – Systèmes dynamiques et chaos

5.1	- Le chaos déterministe	
5.1.1	<i>Dynamique asymptotique</i>	150
5.1.2	<i>Méthodes de discrétisation</i>	152
5.1.3	<i>Propriétés chaotiques</i>	154
5.1.4	<i>Scénarios vers le chaos et renormalisation adaptée</i>	159
5.1.5	<i>Transition vers le chaos et transitions de phase critiques</i>	162
5.1.6	<i>Spectre de puissance et temps de corrélation</i>	165
5.1.7	<i>Systèmes dynamiques avec bruit</i>	169
5.2	- Le scénario du doublage de période	
5.2.1	<i>Autosimilarité du schéma de bifurcation</i>	171
5.2.2	<i>Autosimilarité de l'attracteur critique</i>	174
5.2.3	<i>Analyse par renormalisation</i>	176
5.3	- Le scénario de l'intermittence	
5.3.1	<i>Description du scénario</i>	178
5.3.2	<i>Etude par renormalisation</i>	180
5.3.3	<i>L'influence du bruit</i>	182
5.4	- Le scénario de Ruelle, Takens et Newhouse	
5.4.1	<i>Attracteurs quasi-périodiques et attracteurs étranges</i>	184
5.4.2	<i>Le théorème de Ruelle et Takens</i>	185
5.5	- Théorie KAM et chaos hamiltonien	
5.5.1	<i>Formalisme hamiltonien</i>	187
5.5.2	<i>Théorème KAM et théorème « twist » de Moser</i>	190
5.5.3	<i>Renormalisation et propriétés universelles</i>	192

Appendice 5A – Théorie ergodique et descriptions statistiques

5A.1	<i>Mesures invariantes</i>	198
5A.2	<i>Ergodicité et loi des grands nombres</i>	200
5A.3	<i>Corrélations temporelles et propriété de mélange</i>	204
5A.4	<i>Hypothèse microcanonique et ergodicité</i>	206

Appendice 5B – Renormalisation fibrée

5B.1	<i>Influences extérieures et formalisme fibré</i>	209
5B.2	<i>Renormalisation en présence de bruit</i>	211
5B.3	<i>Analyse linéaire et décomposition spectrale</i>	213
5B.4	<i>Exposants critiques : résultats et conclusions</i>	215

Appendice 5C – Renormalisation des difféomorphismes du cercle

5C.1	<i>Difféomorphismes du cercle et nombres de rotation</i>	217
5C.2	<i>Développement en fraction continue et nombre d'or</i>	219
5C.3	<i>Stabilité asymptotique et renormalisation</i>	222
5C.4	<i>Propriétés universelles</i>	224

Appendice 5D – Turbulence développée	
5D.1 <i>Turbulence développée et chaos déterministe</i>	226
5D.2 <i>Equations hydrodynamiques et cascade de Richardson</i>	227
5D.3 <i>Renormalisation pour la dynamique aux grandes échelles</i>	230

Chapitre 6 – Diffusion stochastique

6.1 Evolution spatio-temporelle	
6.1.1 <i>L'exemple du mouvement brownien</i>	240
6.1.2 <i>Mouvements aléatoires et lois de diffusion</i>	244
6.1.3 <i>Formalisation : processus et marches aléatoires</i>	247
6.2 - Renormalisation spatio-temporelle	
6.2.1 <i>Renormalisation du mouvement brownien</i>	250
6.2.2 <i>Comportement asymptotique et renormalisation des processus</i>	252
6.2.3 <i>Processus autosimilaires</i>	255
6.2.4 <i>Renormalisation des probabilités de transition</i>	259
6.2.5 <i>L'exemple de la diffusion en milieu désordonné</i>	261

Appendice 6A – Polymères

6A.1 <i>Physique des polymères</i>	272
6A.2 <i>Chaînes polymérisées et marches aléatoires</i>	273
6A.3 <i>Méthodes de renormalisation géométriques</i>	280
6A.4 <i>Polymères en mécanique statistique</i>	286

Chapitre 7 – Structures fractales

7.1 - Géométrie fractale	
7.1.1 <i>Aspects critiques des structures fractales</i>	291
7.1.2 <i>Fractales réelles et inhomogènes</i>	295
7.2 - Mesures fractales	
7.2.1 <i>Dimension locale et spectre de dimension</i>	298
7.2.2 <i>Analyse multifractale</i>	301
7.2.3 <i>Renormalisation d'une mesure</i>	304
7.3 - Transformation en ondelettes	
7.3.1 <i>Formules de transformation</i>	306
7.3.2 <i>Invariance d'échelle locale et renormalisation</i>	308

Appendice 7A – Percolation

7A.1 <i>Modèles de percolation : amas et seuil de percolation</i>	314
7A.2 <i>Aspects statiques</i>	320
7A.3 <i>Méthodes de renormalisation</i>	325
7A.4 <i>Aspects dynamiques</i>	332

Annexe I – Mesures et probabilités

1.1 <i>Espaces mesurables et mesures</i>	336
1.2 <i>Variables aléatoires et convergences stochastiques</i>	337
1.3 <i>Processus stochastiques et chaînes de Markov</i>	339

Annexe II – Systèmes dynamiques	
II.1 <i>Systèmes dynamiques discrets</i>	342
II.2 <i>Systèmes dynamiques continus</i>	344
II.3 <i>Variétés stables et instables</i>	345
II.4 <i>Théorie ergodique</i>	348
Annexe III – Formalisme thermodynamique	
III.1 <i>Ensemble microcanonique</i>	350
III.2 <i>Ensemble canonique</i>	351
Annexe IV – Transformation de Fourier	
IV.1 <i>Formules de transformation</i>	353
IV.2 <i>Principales propriétés</i>	354
Bibliographie	356
Index	376
Liste des figures	387