M2 Parcours Physique Quantique – Année universitaire 2011-2012
Théorie quantique des champs approfondie

TD 1: Quantification de la chaîne harmonique[1]

On considère un "cristal" unidimensionnel constitué de masses ponctuelles $m = \rho a$ séparées par une distance a au repos et reliées par des ressorts de raideur $k_s = \kappa/a$. Le but du TD est d'étudier la dynamique quantique de ce système en suivant les règles de quantification canonique puis en écrivant la fonction de partition comme une intégrale fonctionnelle sur un champ de déplacement.

1) Analyse classique

1.1) Écrire le Lagrangien L et déterminer les modes propres du système à partir des équations d'Euler-Lagrange. Donner l'expression de la vitesse du son c dans le cristal.

1.2) Dans la limite des basses énergies (ou grandes distances), on peut approximer le cristal par une chaîne élastique continue. On note $\phi(x,t)$ le déplacement de la masse infinitésimale ρdx située entre x et $x + dx$ à l'équilibre. Le Lagrangien

$$L[\phi] = \int dx\, \mathcal{L}(\partial_x \phi, \dot{\phi}) \tag{1}$$

devient une fonctionnelle du champ $\phi(x,t)$. Que vaut la densité Lagrangienne $\mathcal{L}$? Quelle est l'équation du mouvement satisfaite par ϕ? Comparer avec les résultats de la question (1.1).

2) Quantification canonique

2.1) Donner l'expression du moment conjugué $\Pi(x,t)$ au champ de déplacement et de l'Hamiltonien classique du système.

2.2) Dans la description quantique, les champs classiques $\phi(x,t)$ et $\Pi(x,t)$ deviennent des opérateurs $\hat{\phi}(x)$ et $\hat{\Pi}(x)$ (indépendants du temps dans la représentation de Schrödinger). Quelles sont les relations de commutation satisfaites par ces opérateurs? À l'aide des opérateurs

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L dx\, e^{-ikx}\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^\dagger(-k),\\ \hat{\Pi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L dx\, e^{-ikx}\hat{\Pi}(x) = \hat{\Pi}^\dagger(-k),\end{aligned} \tag{2}$$

montrer que l'Hamiltonien quantique $\hat{H}$ correspond à un ensemble d'oscillateurs harmoniques découplés de fréquences $\omega_k = c|k|$.

2.3) Montrer que l'Hamiltonien peut être diagonalisé en introduisant les opérateurs d'échelle

$$\begin{aligned}\hat{a}(k) &= \sqrt{\frac{\rho\omega_k}{2}}\Big[\hat{\phi}(k) + \frac{i}{\rho\omega_k}\hat{\Pi}(k)\Big],\\ \hat{a}^\dagger(k) &= \sqrt{\frac{\rho\omega_k}{2}}\Big[\hat{\phi}^\dagger(k) - \frac{i}{\rho\omega_k}\Pi^\dagger(k)\Big].\end{aligned} \tag{3}$$

Quelle est la signification physique des opérateurs $\hat{a}_k$ et $\hat{a}_k^\dagger$? Quels sont les états propres de $\hat{H}$?

[1]Les étudiants sont invités à traiter les questions 1 et 2 avant le TD, seule la question 3 sera discutée en détails en cours.

3) Intégrale fonctionnelle

3.1) On introduit les états $|\phi\rangle$ et $|\Pi\rangle$ définis par $\hat{\phi}(x)|\phi\rangle = \phi(x)|\phi\rangle$ et $\hat{\Pi}(x)|\Pi\rangle = \Pi(x)|\Pi\rangle$. Montrer que ces états donnent lieu aux relations de fermeture

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \lim_{a\to 0} \int \prod_{l=0}^{L/a} d\phi(la)\, |\phi\rangle\langle\phi| = \hat{I}, \\ \mathcal{N}' \lim_{a\to 0} \int \prod_{l=0}^{L/a} d\Pi(la)\, |\Pi\rangle\langle\Pi| = \hat{I}, \end{aligned} \tag{4}$$

où $\hat{I}$ est l'opérateur identité. Afin de définir correctement ces relations de fermeture, nous avons ici discrétisé la chaîne (la variable continue x devient une variable discrète la); la chaîne continue s'obtient dans la limite $a \to 0$. $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont des constantes de normalisation qu'on ignorera dans la suite.

3.2) Montrer que la fonction de partition

$$Z = \int_{\phi(x,\beta)=\phi(x,0)} \mathcal{D}[\phi]\, e^{-S[\phi]} \tag{5}$$

peut s'écrire comme une intégrale fonctionnelle sur un champ réel $\phi(x,\tau)$ ($\tau \in [0,\beta]$), avec l'action (Euclidienne)

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int_0^L dx \left[\rho\dot{\phi}^2 + \kappa(\partial_x\phi)^2\right]. \tag{6}$$

3.3) Réécrire l'action $S[\phi]$ en fonction du champ transformé de Fourier

$$\phi(k, i\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{\beta L}} \int_0^\beta d\tau \int_0^L dx\, e^{-i(kx-\omega_n\tau)}\phi(x,\tau). \tag{7}$$

Donner l'expression des fréquences ω_n.

3.4) En utilisant les propriétés des intégrales Gaussiennes, calculer la fonction de partition Z à partir de l'équation (5).

3.5) Que donne l'équation classique du mouvement $\delta S/\delta\phi(x,\tau) = 0$? Montrer qu'à suffisamment haute température, seul le champ $\phi(k, i\omega_{n=0})$ contribue à l'intégrale fonctionnelle. Que vaut alors l'action? Montrer qu'à température nulle on retrouve l'action d'un modèle classique bidimensionnel.

3.6) En utilisant les propriétés des intégrales Gaussiennes, calculer le propagateur du champ ϕ

$$G(k, i\omega_n) = \langle\phi(k, i\omega_n)\phi(-k, -i\omega_n)\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}[\phi]\, \phi(k, i\omega_n)\phi(-k, -i\omega_n)\, e^{-S[\phi]}. \tag{8}$$

Montrer que $G(k, \tau - \tau') = \langle\phi(k,\tau)\phi(-k,\tau')\rangle$ coïncide avec la fonction de corrélation

$$\langle T_\tau \hat{\phi}(k,\tau)\hat{\phi}(-k,\tau')\rangle \equiv \theta(\tau-\tau')\langle\hat{\phi}(k,\tau)\hat{\phi}(-k,\tau')\rangle + \theta(-\tau+\tau')\langle\hat{\phi}(-k,\tau')\hat{\phi}(k,\tau)\rangle, \tag{9}$$

où

$$\hat{\phi}(k,\tau) = e^{\hat{H}\tau}\hat{\phi}(k)e^{-\hat{H}\tau} \tag{10}$$

est un opérateur en représentation d'Heisenberg (en temps imaginaire).

3.7) Quelle information obtient-on à partir des pôles du propagateur "retardé" $G^R(k,\omega) = G(k, i\omega_n \to \omega + i\eta)$ ($\eta \to 0^+$)? Montrer que la fonction spectrale $A(k,\omega) = \Im[G^R(k,\omega)]$ donne des informations sur le spectre d'excitation.

3.8) Peut-on considérer le cas plus général où le Lagrangien $L[\phi]$ contient le terme $\int dx\, V(\phi)$ (V polynôme)? Que vaut alors l'action Euclidienne $S[\phi]$? Pouvez-vous faire le lien avec la quantification d'un champ scalaire relativiste en théorie des champs?

M2 Parcours Physique Quantique – Année universitaire 2011-2012
Théorie quantique des champs approfondie

TD 2 : Intégrale fonctionnelle pour un gaz quantique sans interaction

On considère un gaz quantique (bosons ou fermions) sans interaction dont l'Hamiltonien grand canonique en seconde quantification s'écrit

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_\alpha \xi_\alpha \hat{\psi}^\dagger_\alpha \hat{\psi}_\alpha \qquad (\xi_\alpha = \epsilon_\alpha - \mu) \tag{1}$$

dans une base $\{|\alpha\rangle, \epsilon_\alpha\}$ qui diagonalise l'Hamiltonien à un corps. On rappelle que la fonction de partition peut s'écrire

$$Z = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{k=1}^N d(\psi^*_k, \psi_k) \exp\Big\{ - \sum_\alpha \sum_{k=1}^N \big[\psi^*_{k,\alpha} \left(\psi_{k,\alpha} - \psi_{k-1,\alpha}\right) + \frac{\beta}{N} \xi_\alpha \psi^*_{k,\alpha} \psi_{k-1,\alpha} \big] \Big\}, \tag{2}$$

où $\psi_{N,\alpha} = \zeta \psi_{0,\alpha}$, $\psi^*_{N,\alpha} = \zeta \psi^*_{0,\alpha}$ et

$$d(\psi^*_k, \psi_k) = \begin{cases} \prod_\alpha \dfrac{d\Re[\psi_{k,\alpha}] d\Im[\psi_{k,\alpha}]}{\pi} & \text{(bosons)}, \\ \prod_\alpha d\psi^*_{k,\alpha} d\psi_{k,\alpha} & \text{(fermions)}. \end{cases} \tag{3}$$

$\psi^{(*)}_{k,\alpha}$ est un nombre complexe pour des bosons ($\zeta = 1$) et une variable de Grassmann pour des fermions ($\zeta = -1$).

1) Calcul direct de la fonction de partition

1.1) Rappeler le résultat de l'intégrale Gaussienne

$$\int \prod_{k=1}^N d(\psi^*_k, \psi_k)\, e^{-\sum_{k,k'=1}^N \psi^*_k M_{k,k'} \psi_{k'}}, \tag{4}$$

où M est une matrice $N \times N$ et $\psi^{(*)}_k$ une une variable de Grassmann ou un nombre complexe (dans ce dernier cas, on supposera que M est une matrice hermitienne définie positive).

1.2) En déduire l'expression de l'intégrale (2) en fonction de N. Que vaut la limite $N \to \infty$?

2) Limite continue

2.1) Donner l'expression de l'action $S[\psi^*, \psi]$ obtenue à partir de l'équation (2) en prenant la limite continue $\psi_{k,\alpha} \to \psi_\alpha(\tau)$ ($\tau \in [0, \beta]$). Exprimer $S[\psi^*, \psi]$ en fonction du champ transformé de Fourier

$$\psi_\alpha(i\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^\beta d\tau\, e^{i\omega_n \tau} \psi_\alpha(\tau), \qquad \psi^*_\alpha(i\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^\beta d\tau\, e^{-i\omega_n \tau} \psi^*_\alpha(\tau). \tag{5}$$

2.2) Calculer, dans la limite continue, le propagateur $G_\alpha(i\omega_n) = -\langle \psi_\alpha(i\omega_n) \psi^*_\alpha(i\omega_n) \rangle$ et la fonction de partition. Montrer que le potentiel thermodynamique diverge.

2.3) Quelle est l'expression du nombre moyen de particules $\langle \hat{N} \rangle$ déduit des résultats de la question (2.2) ? Comparer avec le résultat obtenu à partir de l'équation (2) avant de prendre la limite continue. Comment doit-on corriger l'expression du potentiel thermodynamique obtenue à la question (2.2) ?

3) Sommes sur les fréquences de Matsubara

3.1) Calculer la somme

$$\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\frac{e^{i\omega_n\eta}}{i\omega_n-\xi}\quad(\eta\to 0^+) \tag{6}$$

en considérant, dans le plan complexe, l'intégrale

$$\oint_{(\mathcal{C})}\frac{dz}{2i\pi}\frac{e^{\eta z}}{z-\xi}n_\zeta(z),\qquad n_\zeta(z)=\frac{1}{e^{\beta z}-\zeta} \tag{7}$$

le long du cercle $(\mathcal{C})$ de rayon $R\to\infty$ autour de l'origine $z=0$. En déduire l'expression de $\langle\hat{N}\rangle$ en fonction des nombres d'occupation $n_\zeta(\xi_\alpha)$.

3.2) On cherche à calculer la somme

$$\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\ln(-i\omega_n+\xi)e^{i\omega_n\eta} \tag{8}$$

à partir de l'intégrale dans le plan complexe

$$\oint_{(\mathcal{C})}\frac{dz}{2i\pi}\ln(-z+\xi)n_\zeta(z)e^{\eta z}. \tag{9}$$

Pourquoi ne peut-on choisir le même contour qu'à la question (3.1) ? Montrer que le calcul de la somme (8) peut se ramener au calcul d'une intégrale sur une variable réelle. Calculer cette intégrale en utilisant

$$n_\zeta(\epsilon)=\frac{\zeta}{\beta}\frac{d}{d\epsilon}\ln\left|1-\zeta e^{-\beta\epsilon}\right|. \tag{10}$$

À partir des résultats de la question (2.3), retrouver l'expression habituelle du potentiel thermodynamique d'un gaz quantique sans interaction.

M2 Parcours Physique Quantique – Année universitaire 2011-2012
Théorie quantique des champs approfondie

TD 3 : Théorie $\left(\boldsymbol{\varphi}^2\right)^2$ avec symétrie O(N)

1) Du modèle d'Ising à la théorie φ^4.

On considère le modèle d'Ising

$$\beta H = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_i K_{ij}\sigma_j \tag{1}$$

défini sur un réseau hypercubique en dimension d. Les variables σ_i prennent les valeurs ± 1. K_{ij} vaut $\beta J = J/T$ pour deux sites premier voisins et s'annule dans les autres cas.

1.1) Calculer la température critique T_{c0} dans l'approximation de champ moyen.

1.2) En utilisant la transformation de Hubbard-Stratonovich

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_i K_{ij}\sigma_j} \propto \int_{-\infty}^{\infty}\prod_i d\varphi_i \, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_i K^{-1}_{ij}\varphi_j + \sum_i \varphi_i\sigma_i}, \tag{2}$$

réécrire la fonction de partition comme une intégrale sur des champs réels φ_i variant entre $-\infty$ et ∞. Montrer que l'action (ou l'Hamiltonien) correspondante peut s'écrire

$$S[\varphi] = \int d^d r \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 + \frac{r_0}{2}\varphi^2 + \frac{u_0}{4!}\varphi^4 \right\} \tag{3}$$

dans la limite du continu et en négligeant les termes d'ordre φ^6. Donner l'expression des paramètres r_0 et u_0. La dérivation de l'équation (3) peut-elle se généraliser au modèle d'Heisenberg (ou à un modèle de spins à N composantes) ?

2) Le modèle O(N).

On considère le modèle O(N), défini par son action

$$S[\boldsymbol{\varphi}] = \int d^d r \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi})^2 + \frac{r_0}{2}\boldsymbol{\varphi}^2 + \frac{u_0}{4!}\left(\boldsymbol{\varphi}^2\right)^2 \right\}, \tag{4}$$

sur un réseau hypercubique en dimension d. $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_N)^T$ est un vecteur à N composantes, $\boldsymbol{\varphi}^2 = \sum_{i=1}^N \varphi_i^2$ et $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi})^2 \equiv \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{\nabla}\varphi_i)^2$. On note $r_0 = \bar{r}_0(T - T_{c0})$ et on suppose $\bar{r}_0$ et u_0 indépendants de la température. Le modèle est régularisé dans la limite des grandes impulsions par une coupure Λ.

2.1) Calculer $\mathbf{m} = \langle \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})\rangle$ dans l'approximation du champ moyen. Quelle est la symétrie spontanément brisée dans la phase basse température ?

2.2) Développer l'action $S[\boldsymbol{\varphi}]$ autour du paramètre d'ordre $\mathbf{m}$ à l'ordre quadratique dans les fluctuations $\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{m}$. En déduire l'expression du propagateur

$$G_i(\mathbf{q}) = \langle \varphi_i(\mathbf{q})\varphi_i(-\mathbf{q})\rangle - \langle \varphi_i(\mathbf{q})\rangle\langle \varphi_i(-\mathbf{q})\rangle. \tag{5}$$

On considérera successivement les phases haute et basse température. Les résultats obtenus dans la phase ordonnée sont-ils en accord avec le théorème de Goldstone ?

2.3) Calculer la valeur moyenne $\langle(\varphi_i(\mathbf{r}) - m_i)^2\rangle$ dans la phase ordonnée. Que peut-on en conclure quant à l'existence d'une phase ordonnée à température finie en dimension $d \leq 2$? (théorème de Mermin-Wagner).

2.4) En utilisant l'analyse dimensionnelle, déterminer la dimension $[\boldsymbol{\varphi}]$ du champ $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$ ainsi que $[r_0]$ et $[u_0]$. On rappelle qu'une quantité X a la dimension $x = [X]$ si elle est homogène à L^{-x} (où L est une longueur). Montrer qu'on peut réécrire l'action sous la forme adimensionnée

$$S[\tilde{\boldsymbol{\varphi}}] = \int d^d\tilde{r} \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}_{\tilde{\mathbf{r}}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}})^2 + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 + \frac{\tilde{u}_0}{4!}\left(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2\right)^2 \right\}. \tag{6}$$

En déduire que l'approximation gaussienne étudiée à la question (2.2) et plus généralement l'approche perturbative en u_0 est valable pour $d > 4$ mais pas pour $d < 4$. Montrer que dans ce dernier cas, on peut néanmoins définir une température T_G (température de Ginzburg) au-dessus de laquelle l'approximation gaussienne reste valable.

M2 Parcours Physique Quantique – Année universitaire 2011-2012
Théorie quantique des champs approfondie

TD 4 : Théorie de Bogoliubov de la superfluidité

On considère un gaz de bosons à température nulle ($\beta \to \infty$) décrit par l'action

$$S[\psi^*, \psi] = \int_0^\beta d\tau \int d^d r \left\{ \psi^*(\mathbf{r}, \tau) \left(\partial_\tau - \mu - \frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2m} \right) \psi(\mathbf{r}, \tau) + \frac{g}{2} \psi^*(\mathbf{r}, \tau) \psi^*(\mathbf{r}, \tau) \psi(\mathbf{r}, \tau) \psi(\mathbf{r}, \tau) \right\}, \tag{1}$$

où on suppose une coupure Λ sur les impulsions ($|\mathbf{k}| \leq \Lambda$).

1) Spectre d'excitation.

1.1) Que vaut l'action S dans une approximation de point selle où le champ $\psi(\mathbf{r}, \tau) = \psi_0$ est supposé uniforme et indépendent du temps ? A quelle condition a-t-on $\psi_0 \neq 0$? Quelle est alors la symétrie spontanément brisée ? Pourquoi peut-on choisir ψ_0 réel dans perte de généralité ?

1.2) On considère maintenant les fluctuations $\psi'(\mathbf{r}, \tau) = \psi(\mathbf{r}, \tau) - \psi_0$ du champ autour de sa valeur de point selle ψ_0. Que vaut l'action $S[\psi'^*, \psi']$ à l'ordre quadratique en ψ' ?

1.3) On introduit le champ à deux composantes

$$\Psi(\mathbf{k}, i\omega_n) = \begin{pmatrix} \psi'(\mathbf{k}, i\omega_n) \\ \psi'^*(-\mathbf{k}, -i\omega_n) \end{pmatrix}, \qquad \Psi^\dagger(\mathbf{k}, i\omega_n) = \big(\psi'^*(\mathbf{k}, i\omega_n), \psi'(-\mathbf{k}, -i\omega_n) \big), \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{k}, i\omega_n) &= \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \int_0^\beta d\tau \int d^d r \, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_n \tau)} \psi'(\mathbf{r}, \tau), \\ \psi'^*(\mathbf{k}, i\omega_n) &= \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \int_0^\beta d\tau \int d^d r \, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_n \tau)} \psi'^*(\mathbf{r}, \tau). \end{aligned} \tag{3}$$

Montrer qu'on peut écrire l'action sous la forme

$$S = S_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \omega_n} \Psi^\dagger(\mathbf{k}, i\omega_n) \mathcal{D}(\mathbf{k}, i\omega_n) \Psi(\mathbf{k}, i\omega_n), \tag{4}$$

où S_0 est la valeur au point selle et $\mathcal{D}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ une matrice 2×2. En déduire le spectre d'excitation dans la phase superfluide ($\psi_0 \neq 0$). Est-il en accord avec le théorème de Goldstone ?

2) Potentiel thermodynamique et équation d'état.

2.1) En utilisant le résult (10), montrer que le potentiel thermodynamique s'écrit

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2\beta} \sum_{\mathbf{k}, \omega_n} \ln \det \mathcal{D}(\mathbf{k}, i\omega_n), \tag{5}$$

où Ω_0 est la contribution du point selle. La somme sur les fréquences de Matsubara est divergente et on doit en fait considérer

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2\beta} \sum_{\mathbf{k}, \omega_n} \left[\ln \mathcal{D}_{11}(\mathbf{k}, i\omega_n) \, e^{i\omega_n 0^+} + \ln \mathcal{D}_{22}(\mathbf{k}, i\omega_n) \, e^{-i\omega_n 0^+} + \ln \left(1 - \frac{\mathcal{D}_{12}(\mathbf{k}, i\omega_n)^2}{\mathcal{D}_{11}(\mathbf{k}, i\omega_n) \mathcal{D}_{22}(\mathbf{k}, i\omega_n)} \right) \right]. \tag{6}$$

Pouvez-vous justifier cette expression (cf. TD 2) ?

2.2) En vous aidant des résultats (11), exprimer le potentiel thermodynamique Ω en fonction du potentiel chimique μ (on ne cherchera pas à faire les sommes sur $\mathbf{k}$). En déduire la densité de particules n.

2.3) On rapelle que pour une interaction de contact, la longueur de diffusion a dans l'onde s est déterminée par l'équation (voir page 3)

$$\frac{m}{4\pi a} = \frac{1}{g} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}. \tag{7}$$

À l'aide des résultats (12), exprimer n en fonction de μ et a (on prendra la limite $\Lambda \to \infty$). En déduire l'équation d'état du gaz $\mu(n)$ dans la limite $na^3 \ll 1$.

3) Densité du condensat. La densité de particules peut s'écrire

$$n = n_0 + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \langle \psi'^*_{\mathbf{k}} \psi'_{\mathbf{k}} \rangle, \tag{8}$$

où n_0 est la densité de particules dans le condensat.

3.1) Exprimer $n'_{\mathbf{k}} = \langle \psi'^*_{\mathbf{k}} \psi'_{\mathbf{k}} \rangle$ en fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ et en déduire

$$n'_{\mathbf{k}} = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}} + \mu}{E_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2}. \tag{9}$$

3.2) En utilisant (12), déterminer la densité du condensat n_0 dans la limite $na^3 \ll 1$.

4) Démontrer les équations (11) et (12).

Formulaire mathématique

–
$$\int \mathcal{D}[\psi^*,\psi] \exp\left\{-\frac{1}{2}\int dxdy\, (\psi^*(x),\psi(x))A(x,y) \begin{pmatrix} \psi(y) \\ \psi^*(y) \end{pmatrix}\right\} = (\det A)^{-1/2}, \tag{10}$$

où $x=(\mathbf{r},\tau)$, $\int dx = \int_0^\beta d\tau \int d^d r$, etc.

–
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} \ln(-i\omega_n + a)\, e^{i\omega_n 0^+} = 0 \quad \text{pour} \quad a>0,\ T=0, \\ &\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} \ln\left(\frac{\omega^2+a^2}{\omega^2+b^2}\right) = a-b \quad \text{pour} \quad o<a<b,\ T=0. \end{aligned} \tag{11}$$

–
$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right) = -\frac{2}{\pi^2} m^{3/2}\mu^{1/2}, \\ &\int_{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}+\mu}{E_{\mathbf{k}}}\right) = -\frac{2}{3\pi^2}(m\mu)^{3/2}, \end{aligned} \tag{12}$$

où $\int_{\mathbf{k}} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}$, $\epsilon_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2/2m$ et $E_{\mathbf{k}} = [\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}}+\mu)]^{1/2}$.

Longueur de diffusion dans l'onde s

Lorsque le potentiel d'interaction $g(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ entre particules a une symétrie sphérique, les collisions à deux particules ont lieu uniquement dans l'onde s à basse énergie. Dans le repère du centre de masse, un état stationnaire de diffusion s'écrit alors

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{13}$$

où $\mathbf{k}' = |\mathbf{k}|\hat{\mathbf{r}}$ et

$$f_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \to \frac{-a}{1+ika} \quad (k\to 0). \tag{14}$$

Les interactions à basse énergie sont donc entièrement paramétrées par la longueur de diffusion a. Celle-ci peut se calculer à partir de la matrice T,

$$T_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\mathbf{k}^2/m) = -\frac{4\pi}{m} f_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \tag{15}$$

et de l'équation

$$T(\epsilon) = g + gG_0^+(\epsilon)T(\epsilon), \tag{16}$$

où $G_0^+(\epsilon) = (\epsilon + i0^+ - H_0)^{-1}$ (H_0 est l'énergie cinétique des 2 particules dans le repère du centre de masse). Pour un potentiel de contact $g(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r})$, $T_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\epsilon)$ ne dépend que de ϵ et on obtient

$$T(\epsilon) = g + g\int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\epsilon + i0^+ - \mathbf{k}^2/m} T(\epsilon) \tag{17}$$

et par suite l'équation (7).

M2 Parcours Physique Quantique – Année universitaire 2011-2012
Théorie quantique des champs approfondie

TD 5 : Théorie BCS de la supraconductivité

1) Gaz d'électrons libres. On considère un gaz d'électrons sans interaction. Écrire l'Hamiltonien $\hat{H}_0$ en seconde quantification. Quel est l'état fondamental du système ? Donner l'expression de l'action (Euclidienne) $S_0[\psi^*, \psi]$ à température finie, du propagateur à une particule $G(\mathbf{k}, i\omega_n)$ et de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi}\Im[G^R(\mathbf{k}, \omega)]$. Quelle est la signification physique de $A(\mathbf{k}, \omega)$?

2) Métal supraconducteur. On suppose maintenant que les électrons interagissent *via* une interaction attractive. L'Hamitonien du supraconducteur s'écrit $\hat{H}_0 + \hat{H}_{\rm int}$ où

$$\hat{H}_{\rm int} = -\lambda \int d^3r \, \hat{\psi}^\dagger_\uparrow(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \tag{1}$$

et $\lambda > 0$. Dans les supraconducteurs conventionnels, cette interaction est due à l'échange de phonons entre électrons et n'est effective que pour les particules au voisinage de la surface de Fermi, $|\xi_\mathbf{k}| = |\epsilon_\mathbf{k} - \mu| \leq \omega_D$ ($\omega_D \ll \epsilon_F$ est la fréquence de Debye des phonons et ϵ_F l'énergie de Fermi). Cette dernière condition peut être explicitée en réécrivant l'équation (1) en fonction des opérateurs $\hat{\psi}^{(\dagger)}_\sigma(\mathbf{k})$.

2.1) Écrire l'action $S_{\rm int}[\psi^*, \psi]$ correspondant à l'Hamiltonien $\hat{H}_{\rm int}$.

2.2) En utilisant la transformation de Hubbard-Stratonovich

$$e^{-S_{\rm int}[\psi^*,\psi]} = \int \mathcal{D}[\Delta^*, \Delta] \, e^{-\frac{1}{\lambda}\int_0^\beta d\tau \int d^3r |\Delta(\mathbf{r},\tau)|^2 + \int_0^\beta d\tau \int d^3r [\Delta(\mathbf{r},\tau)^* \psi_\downarrow(\mathbf{r},\tau)\psi_\uparrow(\mathbf{r},\tau) + \text{c.c.}]} \tag{2}$$

($\psi_\sigma(\mathbf{r}, \tau)$ est une variable de Grassmann et $\Delta(\mathbf{r}, \tau)$ un champ complexe), on peut réécrire la fonction de partition

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi^*, \psi, \Delta^*, \Delta] \, e^{-S[\psi^*,\psi,\Delta^*,\Delta]} \tag{3}$$

comme une intégrale fonctionnelle sur $\psi^{(*)}$ et $\Delta^{(*)}$. Quelle est l'expression de l'action $S[\psi^*, \psi, \Delta^*, \Delta]$?

3) Approximation de champ moyen. On considère l'action $S[\psi^*, \psi, \Delta^*, \Delta]$ dans le cadre d'une approximation de point selle (ou approximation de champ moyen) où les fluctuations du champ $\Delta(\mathbf{r}, \tau)$ autour de sa valeur moyenne Δ sont négligées. On supposera Δ réel.

3.1) Montrer que l'action des électrons en présence du champ moyen Δ s'écrit

$$S_{\rm MF}[\psi^*, \psi] = \beta V \frac{\Delta^2}{\lambda} - \sum_{\mathbf{k},\omega_n} \Psi^\dagger(\mathbf{k}, i\omega_n)\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{k}, i\omega_n)\Psi(\mathbf{k}, i\omega_n) \tag{4}$$

en fonction du spineur de Nambu

$$\Psi(\mathbf{k}, i\omega_n) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(\mathbf{k}, i\omega_n) \\ \psi^*_\downarrow(-\mathbf{k}, -i\omega_n) \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger(\mathbf{k}, i\omega_n) = (\psi^*_\uparrow(\mathbf{k}, i\omega_n), \psi_\downarrow(-\mathbf{k}, -i\omega_n)). \tag{5}$$

Donner l'expression de la matrice 2×2 $\mathcal{G}(\mathbf{k}, i\omega_n)$. On introduira l'énergie $E_\mathbf{k} = \sqrt{\xi^2_\mathbf{k} + \Delta^2}$. Montrer que les éléments de $\mathcal{G}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ peuvent s'exprimer en fonction de

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, i\omega_n) &= -\langle \psi_\sigma(\mathbf{k}, i\omega_n)\psi^*_\sigma(\mathbf{k}, i\omega_n)\rangle \quad \text{(fonction de Green “normale”)}, \\ F(\mathbf{k}, i\omega_n) &= -\langle \psi_\uparrow(\mathbf{k}, i\omega_n)\psi_\downarrow(-\mathbf{k}, -i\omega_n)\rangle \\ F^\dagger(\mathbf{k}, i\omega_n) &= -\langle \psi^*_\downarrow(-\mathbf{k}, -i\omega_n)\psi^*_\uparrow(\mathbf{k}, i\omega_n)\rangle \end{aligned} \quad \text{(fonctions de Green “anormales”)}. \tag{6}$$

Donner l'expression de $G(\mathbf{k}, i\omega_n)$ et $F(\mathbf{k}, i\omega_n)$.

3.2) Quelle condition doit on imposer au grand potentiel Ω (ou, de manière équivalente, à la fonction de partition Z) pour obtenir la valeur de Δ ? En déduire que $\Delta = \lambda\langle\psi_\downarrow(\mathbf{r},\tau)\psi_\uparrow(\mathbf{r},\tau)\rangle$ et obtenir l'équation satisfaite par Δ. Montrer qu'une solution non triviale $\Delta \neq 0$ est possible au-dessous d'une température T_c que l'on déterminera. On supposera que la densité d'états $N(\xi) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \delta(\xi - \xi_{\mathbf{k}})$ peut être approximée par $N(0)$ lorsque $|\xi| \leq \omega_D$ et on utilisera

$$\int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\xi} \tanh\left(\frac{\beta\xi}{2}\right) \simeq \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\right) \qquad (T \ll \omega_D), \tag{7}$$

où γ est l'exponentielle de la constante d'Euler. Quelle est la signification physique de T_c ? Quelle est la symétrie brisée dans la phase basse température $T < T_c$?

3.3) Déterminer la valeur Δ_0 de Δ à température nulle. En déduire que le rapport Δ_0/T_c est "universel".

3.4) Montrer que la transformation unitaire

$$\begin{pmatrix} \gamma_\uparrow(\mathbf{k}, i\omega_n) \\ \gamma^*_\downarrow(-\mathbf{k}, -i\omega_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & -v_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(\mathbf{k}, i\omega_n) \\ \psi^*_\downarrow(-\mathbf{k}, -i\omega_n) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

où

$$u^2_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\right), \qquad v^2_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\right), \tag{9}$$

diagonalise l'action. Que peut-on en déduire sur la nature des excitations à une particule ? Montrer que ce résultat s'interprète naturellement si on voit l'état supraconducteur comme un condensat de "paires de Cooper" $(\mathbf{k},\uparrow; -\mathbf{k},\downarrow)$. Quelle est alors la signification physique de $u_{\mathbf{k}}$ et $v_{\mathbf{k}}$? Tracer $u_{\mathbf{k}}$, $v_{\mathbf{k}}$ et $E_{\mathbf{k}}/\Delta$ en fonction de $\xi_{\mathbf{k}}/\Delta$. Peut-on faire le lien avec la formulation originale de Bardeen, Cooper et Schrieffer basée sur la fonction d'onde variationnelle

$$|\Psi_{\mathrm{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\hat\psi^\dagger_\uparrow(\mathbf{k})\hat\psi^\dagger_\downarrow(-\mathbf{k})\right)|\mathrm{vide}\rangle. \tag{10}$$

3.5) Calculer la fonction spectrale $A(\mathbf{k},\omega) = -\frac{1}{\pi}\Im[G^R(\mathbf{k},\omega)]$ du supraconducteur.

4) Modes collectifs. Les modes collectifs du supraconducteur correspondent aux modes propres de fluctuation du champ complexe $\Delta(\mathbf{r},\tau)$.

4.1) Combien y a-t-il de modes collectifs ?

4.2) Montrer, sans faire de calcul, que l'un (au moins) de ces modes doit avoir une énergie nulle dans la limite des grandes longueurs d'onde. Quelle action effective de basse énergie peut-on proposer pour ce mode ?

M2 Parcours Physique Quantique – Année universitaire 2011-2012
Théorie quantique des champs approfondie

TD 6 : Transition superfluide–isolant-de-Mott dans un gaz de bosons

On considère le modèle de Bose-Hubbard,

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle \mathbf{r},\mathbf{r}'\rangle} \left(\hat{b}^\dagger_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{r}'} + \text{h.c.} \right) + \sum_{\mathbf{r}} \left(-\mu \hat{b}^\dagger_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{r}} + \frac{U}{2} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{r}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \right), \tag{1}$$

décrivant des bosons se déplaçant sur un réseau (t désignant l'amplitude de saut entre sites premiers voisins) et soumis à une répulsion locale U. Le potentiel chimique μ permet de fixer la densité moyenne de bosons (c'est-à-dire le nombre moyen de particules par site). On suppose un réseau hypercubique en dimension d et on considère uniquement la limite de température nulle.

1) Transition superfluide–isolant-de-Mott

1.1) Quel est l'état fondamental en l'absence d'interaction ($U = 0$) ? Comment la répulsion locale affecte-t-elle la dynamique des bosons ? En déduire que, selon la densité de bosons et la force des interactions, l'état fondamental est soit un état superfluide soit un "isolant de Mott" (on considérera les limites $t/U \gg 1$ et $t/U \ll 1$).

1.2) La théorie de Bogoliubov vous paraît-elle appropriée pour étudier la transition de Mott entre l'état superfluide et l'isolant de Mott ?

2) Théorie de champ moyen

2.1) Que devient l'Hamiltonien (1) lorsque l'on traîte le terme de saut intersite dans une approximation de champ moyen ? On notera $\psi = \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle$ le paramètre d'ordre (supposé uniforme). Montrer qu'on se ramène à un Hamiltonien $\hat{H}_{\text{eff}}$ à un seul site.

2.2) On cherche à calculer l'énergie du fondamental (par site) sous la forme

$$E = a_0 + a_2 |\psi|^2 + a_4 |\psi|^4 + \mathcal{O}(|\psi|^6). \tag{2}$$

Écrire $\hat{H}_{\text{eff}}$ en fonction de l'opérateur $\hat{n} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$ lorsque $\psi = 0$. En déduire l'état fondamental et son énergie a_0 en fonction de μ/U.

2.3) Calculer $E^{(2)} = a_2 |\psi|^2$ en utilisant la théorie de perturbation au second ordre. A quelle condition l'isolant de Mott est-il stable ? En déduire le diagramme de phase dans le plan $(2dt/U, \mu/U)$. On introduira les notations $D = 2dt$, $\delta\mu = \mu - U(n_0 - 1/2)$ et $x = n_0 + 1/2$.

2.4) Calculer la densité moyenne de bosons n dans l'isolant de Mott et dans la phase superfluide. En déduire que la compressibilité $\kappa = n^{-2} dn/d\mu$ de l'isolant de Mott est nulle. Montrer qu'il existe un point particulier de la ligne de transition isolant-de-Mott–superfluide où la transition a lieu à densité constante.

3) Dynamique des bosons dans l'isolant de Mott

3.1) Calculer la fonction de Green locale $G(\tau) = -\langle T_\tau \hat{b}(\tau) \hat{b}^\dagger(0) \rangle$ et sa transformée de Fourier $G(i\omega_n)$ dans la limite locale où $t = 0$.

3.2) Donner l'expression de l'action (Euclidienne) $S[b^*, b]$ du modèle de Bose-Hubbard. Que devient la fonction de partition après la transformation de Hubbard-Stratonovich

$$e^{\int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} b^*_{\mathbf{r}} t_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} b_{\mathbf{r}'}} = \int \mathcal{D}[\psi^*, \psi] \, e^{-\int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \psi^*_{\mathbf{r}} t^{-1}_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \psi_{\mathbf{r}'} + \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r}} (\psi^*_{\mathbf{r}} b_{\mathbf{r}} + \text{c.c.})} \tag{3}$$

(ψ est un champ complexe) ? $t_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$ vaut t si les sites $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ sont premiers voisins et s'annule dans les autres cas.

3.3) On peut alors intégrer le champ b dans un développement en cumulant :

$$\int \mathcal{D}[b^*, b]\, e^{-S_{\rm loc}[b^*,b]-S'[b^*,b]} = Z_{\rm loc}\, e^{-\langle S'\rangle + \frac{1}{2}\left(\langle S'^2\rangle - \langle S'\rangle^2\right)+\cdots} \tag{4}$$

où les valeurs moyennes $\langle\cdots\rangle$ sont prises avec l'action locale $S_{\rm loc}$ correspondant à la limite $t=0$. Que vaut l'action $S[\psi^*,\psi]$ à l'ordre quadratique dans le champ auxiliaire ψ ? En déduire le propagateur $\mathcal{G}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ du champ ψ.

3.4) À quelle condition sur $\mathcal{G}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ l'isolant de Mott est-il stable ? Montrer qu'on retrouve le diagramme de phase obtenu à la question (2.3).

3.5) Montrer que le spectre à une particule comprend 2 excitations, $E_+(\mathbf{k})$ et $E_-(\mathbf{k})$. Comment la transition vers la phase superfluide se manisfeste-t-elle ? En quoi la transition qui a lieu à densité constante est-elle particulière ?

3.6) Quel est le comportement de $E_\pm(\mathbf{k})$ dans la limite $\mathbf{k}\to 0$. Montrer qu'à la transition de Mott, $E_\pm(\mathbf{k}) \sim |\mathbf{k}|^z$ où l'exposant z prend la valeur 1 ou 2.

4) Action effective de basse énergie

On peut écrire une action effective de basse énergie pour le champ auxiliaire ψ en développant $\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ en puissance de $\mathbf{k}$ et ω_n. Montrer qu'on obtient

$$S[\psi^*,\psi] = \int_0^\beta d\tau \int d^d r\, \psi^*(\mathbf{r},\tau)\left(r + K_1\partial_\tau - K_2\partial_\tau^2 - K_3\boldsymbol{\nabla}^2 + \cdots\right)\psi(\mathbf{r},\tau) + \cdots \tag{5}$$

où

$$r = -\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{k}=0, i\omega_n = 0), \qquad K_1 = -\frac{\partial r}{\partial \mu}. \tag{6}$$

En déduire que K_1 s'annule lorsque la transition a lieu à densité constante. Que peut-on en déduire quant à la classe d'universalité de la transition superfluide–isolant-de-Mott ?

M2 Parcours Physique Quantique – Année universitaire 2011-2012
Théorie quantique des champs approfondie

TD 7 : Le modèle σ non-linéaire quantique en dimension 2

On considère le modèle σ non-linéaire (MσNL) quantique bidimensionnel dont la fonction de partition s'écrit

$$Z = \int \mathcal{D}[\mathbf{n}]\delta(\mathbf{n}^2-1)\exp\left\{-\frac{N}{2g}\int_0^\beta d\tau \int d^2r \left[(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n})^2 + c^{-2}(\partial_\tau \mathbf{n})^2\right]\right\}, \quad (1)$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{r},\tau)$ est un champ réel à N composantes de norme unité et satisfaisant $\mathbf{n}(\mathbf{r},\tau+\beta) = \mathbf{n}(\mathbf{r},\tau)$. g désigne la constante de couplage du modèle et c est une vitesse de propagation. Le modèle est régularisé par une coupure ultraviolette Λ sur les impulsions.

1) Le MσNL dans la limite $N \to \infty$.

On exprime $\mathbf{n} = (\sigma, \boldsymbol{\pi})$ en fonction de sa composante $\sigma = n_1$ et du vecteur $\boldsymbol{\pi} = (n_2, \cdots, n_N)^T$ à $N-1$ composantes. D'autre part, on réécrit la contrainte $\mathbf{n}^2 = 1$ à l'aide d'un champ multiplicateur de Lagrange $\lambda(\mathbf{r},\tau)$ en utilisant la relation

$$\int \mathcal{D}[\lambda]\, e^{-\frac{i}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^2r\, \lambda(\mathbf{n}^2-1)} \propto \delta(\mathbf{n}^2-1). \quad (2)$$

1.1) Montrer qu'on peut intégrer le champ $\boldsymbol{\pi}$. Que vaut l'action $S[\sigma,\lambda]$? On introduira le propagateur G_π du champ π_i (en présence du champ fluctuant $\lambda(\mathbf{r},\tau)$) défini par

$$G_\pi^{-1}(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}',\tau') = \left[-\frac{N}{g}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}^2 + c^{-2}\partial_\tau^2\right) + i\lambda(\mathbf{r},\tau)\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(\tau-\tau'). \quad (3)$$

1.2) Montrer que l'approximation du col devient exacte dans la limite $N \to \infty$. Donner l'expression des équations de col pour des champs σ et λ statiques et uniformes. On introduira le "gap" en énergie m du champ π_i, relié à sa longueur de corrélation par $\xi = c/m$. Discuter qualitativement les solutions de ces équations et leur signification physique.

2) Diagramme de phase à température nulle.

2.1) Montrer que pour $g \geq g_c$, l'état fondamental du système est désordonné. Quelle est l'expression de g_c ? Calculer $m_0 = m(T=0)$ en fonction de g et de g_c. En déduire l'exposant critique ν associé à la longueur de corrélation, la dimension anormale η et l'exposant critique dynamique z.

2.2) Calculer l'aimantation $\langle \mathbf{n}(\mathbf{r},\tau)\rangle$ en fonction de g dans la phase ordonnée et en déduire la valeur de l'exposant critique β. Le théorème de Goldstone est-il satisfait ? On écrit le propagateur transverse sous la forme

$$G_\pi(\mathbf{q}, i\omega) = \frac{\sigma^2 c^2}{\rho_s(\omega^2 + c^2\mathbf{q}^2)}, \quad (4)$$

où ρ_s est la "raideur" ou "rigidité". Montrer que $\Delta_- = \rho_s/N$ a les dimensions d'une énergie et $\xi_J = c/\Delta_-$ celles d'une longueur (longueur Josephson). On admettra que la longueur Josephson sépare un régime de fluctuations critiques ($|\mathbf{q}|, |\omega|/c \gg \xi_J^{-1}$) d'un régime de basse énergie dominé par les modes de Goldstone (pourquoi cette interprétation n'est-elle pas évidente dans la limite $N \to \infty$ considérée ici ?).

3) Diagramme de phase à température finie.

3.1) Montrer qu'à température finie seule la phase désordonnée est possible. Ce résultat pouvait-il être anticipé ? Vérifier que

$$m = 2T \operatorname{argsinh} \left\{ \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{g_c} - \frac{1}{g} \right) \right] \right\} \tag{5}$$

pour $m, T \ll c\Lambda$.

3.2) On considère le cas $g \geq g_c$ où le système est désordonné à température nulle. Exprimer m en fonction de m_0 et T. Montrer qu'à basse température, le système est dominé par les fluctuations quantiques, alors qu'à haute température les fluctuations quantiques et classiques sont importantes.

3.3) On considère maintenant le cas $g \leq g_c$ où le système est ordonné à température nulle. Exprimer m en fonction de Δ_- et T et montrer qu'on peut à nouveau distinguer 2 régimes en température : un régime basse température où le système est désordonné par les fluctuations classiques, et le régime haute température déjà étudié à la question (3.2).

3.4) Tracer le diagramme de phase dans le plan (g, T) en indiquant les lignes de passage (*crossover*) entre les différents régimes à température finie.