UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Examen : Du mouvement brownien à la modélisation financière

Jeudi 20 décembre 2012 - durée : 3h
Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

1 Où l'on retrouve l'équation de Smoluchowski

Ce problème présente une manière originale[1] de déduire l'équation de Fokker-Planck à partir d'une simple hypothèse sur la forme de la densité de probabilité conditionnelle $P(x,t\,|x_0,t_0)$ qu'une particule soit à la position x à dx près à l'instant t sachant qu'elle était à la position x_0 à l'instant t_0. Pour un processus de Markov, cette densité de probabilité vérifie l'équation de Chapman-Kolmogorov : pour toute position x_1 et pour tout instant t_1 tel que $t_0 \leq t_1 \leq t$:

$$P(x,t\,|x_0,t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t\,|x_1,t_1)P(x_1,t_1\,|x_0,t_0)dx_1. \tag{1}$$

▷ **1-1** Expliquer le sens de l'équation (1) à l'aide d'un dessin.

▷ **1-2** Écrire sous la forme donnée par l'équation (1), $P(x,t+\Delta t\,|x_0,t_0)$ pour $t_1 = t$, où $\Delta t > 0$ est un petit intervalle de temps. En déduire l'expression de $\dfrac{\partial P(x,t\,|x_0,t_0)}{\partial t}$ en fonction de $P(x,t+\Delta t\,|x_1,t)$, $P(x_1,t\,|x_0,t_0)$ et $P(x,t\,|x_0,t_0)$, dans la limite où $\Delta t \to 0$.

A Une démonstration simple de l'équation de Fokker-Planck

Pour déterminer $P(x,t\,|t_0,x_0)$, nous allons faire une hypothèse sur la forme de $P(x,t+\Delta t\,|x_1,t)$. Dans le cas où $\Delta t = 0$, on a bien sûr $P(x,t\,|x_1,t) = \delta(x-x_1)$, où $\delta(x)$ est la fonction de Dirac. Dans la limite $\Delta t \to 0$, on fait l'hypothèse que $P(x,t+\Delta t\,|x_1,t)$ s'écrit sous la forme d'un développement au premier ordre en Δt :

$$P(x,t+\Delta t\,|x_1,t) = \delta(x-x_1) + \Delta t\big[a_1(x_1)\delta^{(1)}(x-x_1) + a_2(x_1)\delta^{(2)}(x-x_1) + \dots\big] + \dots, \tag{2}$$

où $\delta^{(1)}(x)$ et $\delta^{(2)}(x)$ sont les dérivées première et seconde de la fonction de Dirac $\delta(x)$ et où a_1 et a_2 sont deux coefficients qui ne dépendent que de la position initiale x_1.

Pour estimer qualitativement la forme de $P(x,t+\Delta t\,|x_1,t)$, on peut se placer en $x_1 = 0$ et représenter la fonction de Dirac $\delta(x)$ par une loi gaussienne $g(x)$ centrée ($m = 0$) de variance $\sigma^2 \to 0$.

▷ **1-3** Donner l'expression de $g(x)$ et de ses deux premières dérivées $g^{(1)}(x)$ et $g^{(2)}(x)$. Tracer l'allure de $g(x)$, $g^{(1)}(x)$ et $g^{(2)}(x)$ pour σ^2 petit, mais non nul. Dans la limite $\Delta t \to 0$, quel est l'effet du terme correctif en $g^{(1)}(x)$ sur la loi gaussienne $g(x)$? Même question pour le terme correctif en $g^{(2)}(x)$. En déduire l'allure de $P(x,t+\Delta t\,|0,t)$ donnée par le développement (2).

[1] D'après "Simplified derivation of the Fokker-Planck equation", A.E. Siegman, Am. J. Phys. **47**, 545 (1979).

▷ **1-4** Montrer que quelle que soit la fonction f on a, pour tout x fini et pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\delta^{(n)}(x-y)dy = \left.\frac{\partial^n f(y)}{\partial y^n}\right|_{y=x} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\delta^{(n)}(y-x)dy = (-1)^n \left.\frac{\partial^n f(y)}{\partial y^n}\right|_{y=x},$$

où $\delta^{(n)}(x)$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction de Dirac $\delta(x)$.

▷ **1-5** En déduire l'équation de Fokker-Planck en fonction des coefficients $a_1(x)$ et $a_2(x)$.

▷ **1-6** La particule étant à la position x_1 à l'instant t, utiliser le développement (2) de $P(x, t+\Delta t\,|x_1, t)$ pour exprimer son déplacement moyen $< \Delta x >=< x - x_1 >$ entre les instants t et $t + \Delta t$ en fonction de $a_1(x_1)$.

▷ **1-7** De même, donner l'expression de $< (\Delta x)^2 >=< (x - x_1)^2 >$ en fonction de $a_2(x_1)$.

B L'équation de Langevin dans la limite visqueuse

La position de la particule brownienne de masse m obéit à l'équation de Langevin :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\gamma\frac{dx}{dt} + F(x) + \eta(t),$$

où $F(x)$ est un champ de force inhomogène et $m\gamma$ le coefficient de frottement fluide. La force aléatoire $\eta(t)$ est de moyenne nulle et ses corrélations à deux temps sont données par

$$< \eta(t)\eta(t') >= 2m\gamma kT\,\delta(t-t'),$$

où k est la constante de Boltzmann et T est la température.

▷ **1-8** Justifier cette hypothèse sur la fonction de corrélation de $\eta(t)$.

Dans la limite visqueuse, le terme d'inertie est négligeable devant la force de frottement et l'équation de Langevin devient :

$$0 \simeq -m\gamma\frac{dx}{dt} + F(x) + \eta(t). \tag{3}$$

▷ **1-9** Montrer que dans la limite visqueuse la particule évolue sur des intervalles de temps grands devant le temps caractéristique du frottement fluide.

▷ **1-10** La particule étant en x_1 à l'instant t, calculer le déplacement moyen $< \Delta x >=< x(t+\Delta t) - x_1 >$ entre les instants t et $t + \Delta t$ en intégrant l'équation (3).

▷ **1-11** De même, calculer $< (\Delta x)^2 >$. Montrer que dans la limite $\Delta t \to 0$

$$< (\Delta x)^2 >\simeq 2D\Delta t,$$

où l'on donnera l'expression du coefficient de diffusion D en fonction des données du problème.

▷ **1-12** En déduire les expressions de $a_1(x_1)$ et $a_2(x_1)$ en fonction des données du problème dans la limite $\Delta t \to 0$.

▷ **1-13** En déduire l'équation de Smoluchowski portant sur la densité de probabilité $P(x, t\,|x_0, t_0)$ en fonction de D, m, γ et $F(x)$.

On suppose que la particule brownienne se déplace le long d'un axe vertical Ox, pour $x > 0$, dans le champ de pesanteur $F(x) = -mg$, où g est l'accélération de la pesanteur. A l'instant initial $t_0 = 0$ la particule est en $x_0 = h$.

▷ **1-14** Résoudre l'équation de Smoluchowski en introduisant la transformée de Fourier

$$\phi(u,t) = \int e^{iux}P(x,t)dx$$

de la densité de probabilité $P(x,t) = P(x,t|x_0,t_0)$ avec $x_0 = h$ et $t_0 = 0$. Décrire le mouvement de la particule.

La solution stationnaire $P_s(x)$ de l'équation de Smoluchowski est telle que $\dfrac{\partial P_s}{\partial t}$ =0.

▷ **1-15** A partir de l'équation trouvée à la question **1-14**, déterminer $P_s(x)$ en fonction de deux constantes d'intégration.

▷ **1-16** Quelle condition doit vérifier $P_s(x)$ sur l'intervalle $[0, \infty]$? En déduire les deux constantes d'intégration et l'expression de $P_s(x)$. Quel est le nom de cette loi ?

2 Où l'on retrouve l'équation de Black-Scholes

Nous allons montrer qu'il est possible de construire un portefeuille composé d'un actif et d'un dépôt bancaire qui se comporte comme une option d'achat sur cet actif sous-jacent. Ce portefeuille permettra de démontrer simplement l'équation de Black-Scholes.

Supposons qu'un portefeuille Π, composé d'une quantité a d'un crédit bancaire B au taux d'intérêt r supposé constant et d'une quantité b d'un actif S, ait la même valeur qu'une option d'achat C sur cet actif sous-jacent. Soit

$$\Pi = aB + bS = C. \tag{4}$$

▷ **2-1** Lorsqu'on dépose un montant B sur un compte rémunéré au taux r, quelle est l'augmentation dB de ce montant pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt ?

On rappelle que la variation de la valeur de l'actif sous-jacent S se comporte pendant l'intervalle de temps dt comme

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX,$$

où μ est la dérive, $\sigma > 0$ est la volatilité supposée constante et dX est une variable aléatoire distribuée sur une loi gaussienne centrée de variance dt. La variation de l'option $C(S,t)$ est donnée par le lemme d'Itô :

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dX.$$

▷ **2-2** En écrivant que la variation $d\Pi$ du portefeuille (4) sur un intervalle de temps dt est égale à la variation dC de l'option, montrer qu'on obtient l'expression du coefficient b et une équation différentielle portant sur C qui dépend de B, r et σ.

▷ **2-3** Utiliser l'expression du portefeuille (4) pour éliminer B dans l'équation trouvée à la question précédente et en déduire l'équation de Black-Scholes portant sur C.

▷ **2-4** Rappeler la définition d'une option d'achat caractérisée par une date de maturité T et un prix d'exercice K. En déduire la condition au limite donnant la valeur de l'option $C(S_T, T)$ à la date de maturité, que l'on représentera en fonction de S_T.

On donne la solution de l'équation de Black-Scholes pour une option d'achat :

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{5}$$

où

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \end{aligned}$$

et où $N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite (la probabilité qu'une variable gaussienne soit inférieure à x) :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

▷ **2-5** Supposons que $K = S_0$ la valeur de l'actif sous-jacent à $t = 0$. Décrire le comportement limite de la prime $C(S_0, 0)$ lorsque $\sigma \to 0$, puis lorsque $\sigma \gg 1$.